中考模型（六）半角模型

@江游老师



目　录

CONTANTS

1 常见的两种类型

2 典型例题

3 进阶拓展练习



1

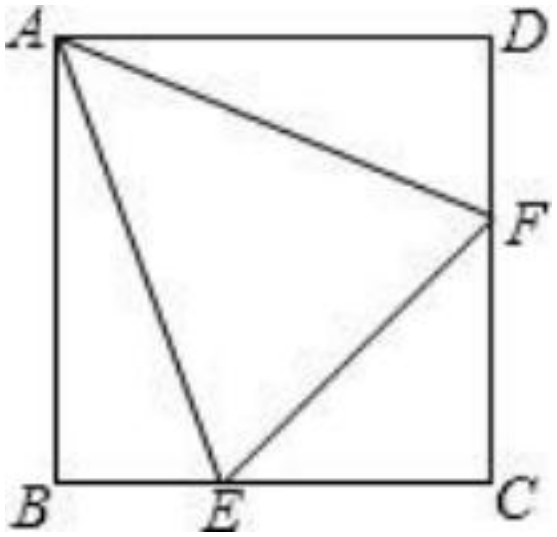
常见的两种类型



模型一　共顶点，等线段，绕着顶点来旋转

模型二　　鸡爪图，三线段，抓住定角也旋转

模型一 共顶点，等线段，绕着顶点来旋转



1.如图：正方形ABCD中，E、F分别是BC、CD上的 点，且∠EAF=45°，

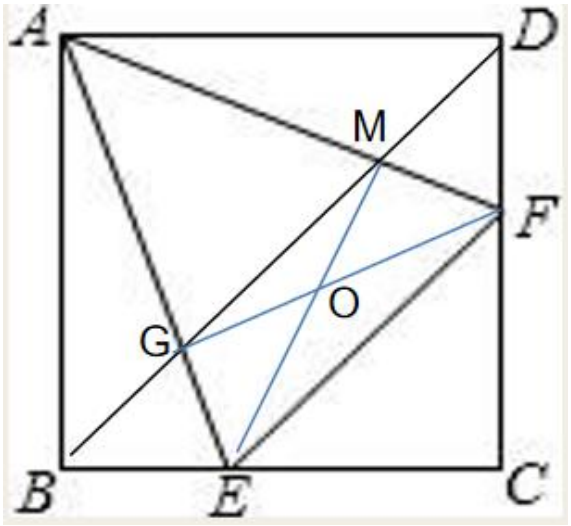
(1)证明：EF=BE+DF

(2)证明△ECF的周长等于正方形ABCD周长的一半。

(3)过A作AH⊥EF于H，证明：AH=BC

备注：用旋转法和截长补短法两种方法证明。

模型二　鸡爪图，三线段，抓住定角也旋转



2.如图：在“1”的条件下，连接BD交AE于G，AF于M，连接EM、GF。GF与EM相交于O点。

(1)证明：$BG^2+MD^2=GM^2$

(2)证明：△AGF与△AME是等腰直角三角形

(3)证明：AE平分∠BEF；AF平分∠DFE

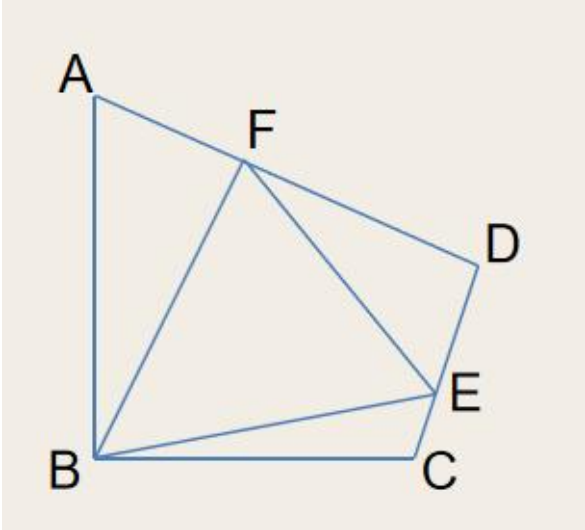
(4) 证明: 圆内接四边形ABEM

(5)证明：△EAB∽△EFG；　△ADF∽△EMF

2

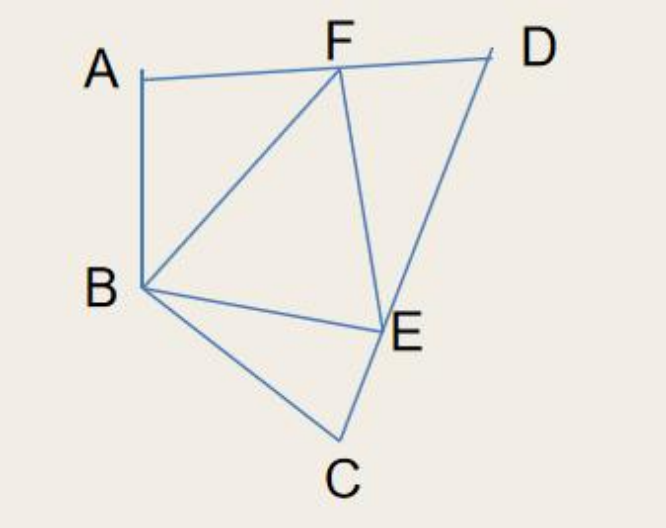
典型例题

典型例题



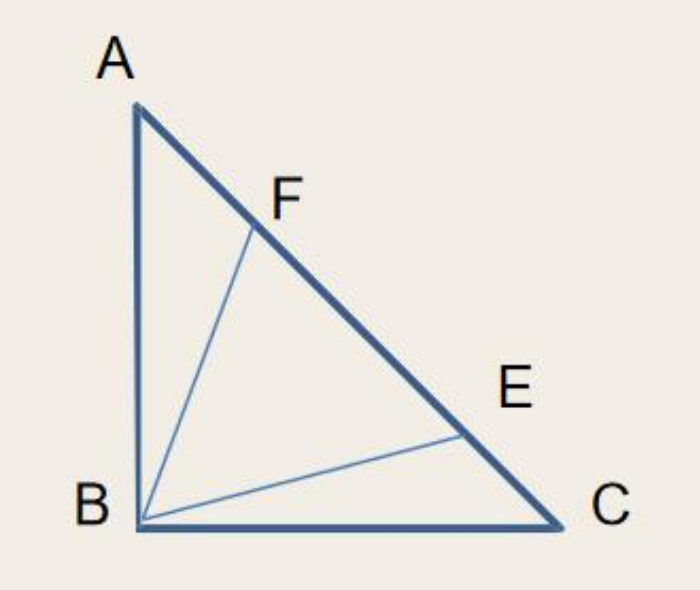
1.如图：四边形ABCD中，AB=BC,E、F分别是CD、AD上的 点，∠ABC= ∠ADC= 90°且∠EBF=45°，猜想并证明线段EF、CE、AF之间的数量关系

典型例题



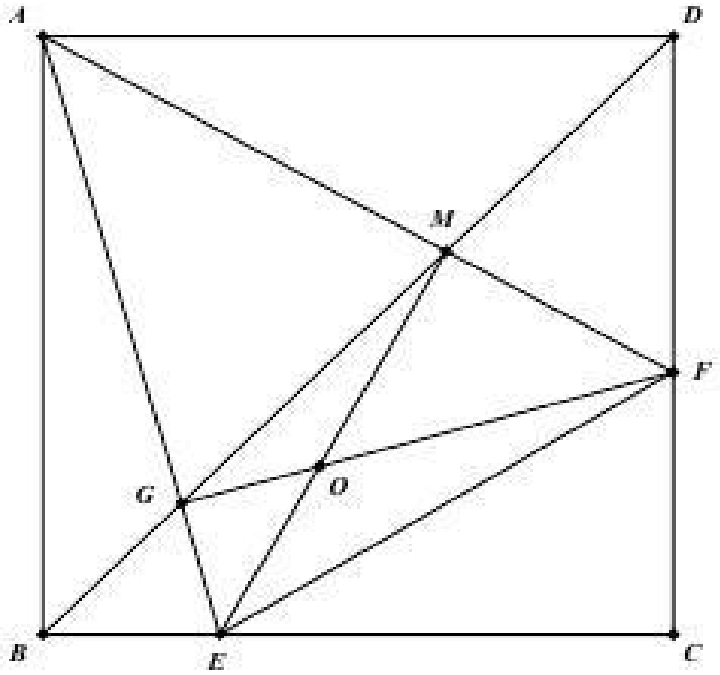
2.如图：四边形ABCD中,AB=BC,E、F分别是CD、AD上的 点，∠ABC+∠ADC= 180°
且∠EBF=1/2 ∠ABC，
猜想并证明线段EF、CE、AF之间的数量关系

典型例题



3.如图：等腰直角△ABC中，∠ABC =90°，
E、F都 是AC上的点，且∠EBF=45 °，
猜想并证明线段EF、CE、AF之间的数量关系

半角模型母体题源



正方形 $ABCD$ 中，$\angle EAF = 45°$，则有下列结论：

线段之间的关系：

$EF = BE + FD$

$BG^2 + MD^2 = GM^2$

$CE = \sqrt{2}DM, DF = \sqrt{2}BG, EF = \sqrt{2}GM$

$BM \cdot DG = AB^2$

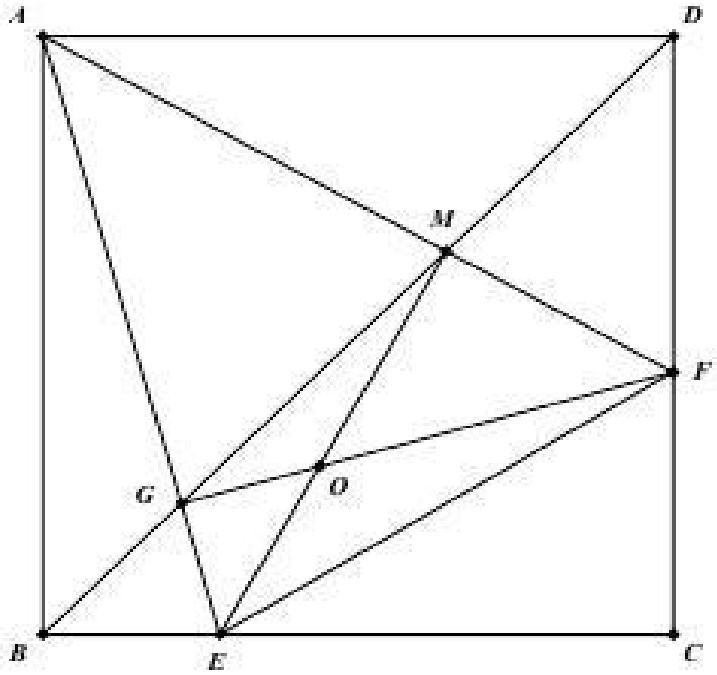
$\dfrac{BE}{CE} \cdot \dfrac{DF}{FC} = \dfrac{1}{2}$

$AM = EM, AG = FG$

$\triangle AEF$ 的边 EF 上的高等于正方形的边长

$\triangle EFC$ 的周长等于正方形边长的 2 倍

半角模型母体题源



正方形 $ABCD$ 中，$\angle EAF = 45°$，则有下列结论：

角度之间的关系：

$\angle AEB = \angle AEF, \angle AFE = \angle AFD$

根据下面共圆的结果，每个共圆都至少可以得到四对相等的角。

特殊三角形：

$\triangle AGF$ 与 $\triangle AME$ 是等腰直角三角形

共圆：

$ABEM, ADFG, GEFM, CEMF, CEGF, CEGMF$ 分别共圆

面积关系：

$S_{\triangle AEF} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADF}$

$S_{\triangle AEF} = 2S_{\triangle AGM}$

$S_{ABCD} : S_{\triangle AEF} = 2AB : EF$

相似关系：

$\triangle AEF, \triangle AMG, \triangle BGE, \triangle DMF, \triangle DAG, \triangle BMA$ 相似；

$\triangle EFG \sim \triangle EAB, \triangle ADF \sim \triangle EMF$

3

进阶拓展练习

典型例题

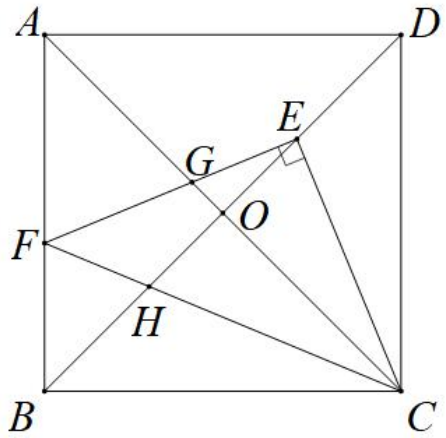
1.边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 交于点 O，E 在 BD 上，作 $EF \perp CE$ 交 AB 于点 F，连接 CF 交 BD 于 H，则下列结论：

①$EF=EC$；②$CF^2=CG \cdot CA$；③$BE \cdot DH=16$；④若 $BF=1$，则 $DE=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，

正确的是（　　）

A．①②④　　B．②③④

C．①②③　　D．①②③④



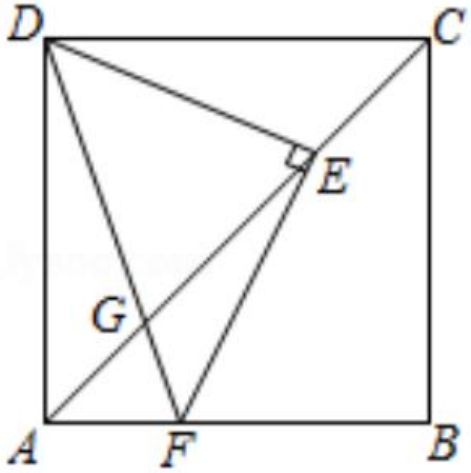
典型例题

2.如图，正方形$ABCD$中，$AB=3$，点E是对角线AC上的一点，连接DE，过点E作$EF\perp DE$，交AB于点F，连接DF交AC于点G，下列结论：

①$DE=EF$；②$\angle ADF=\angle AEF$；③$DG^2=GE\cdot GC$；④若$AF=1$，则$EG=\frac{5}{4}\sqrt{2}$，

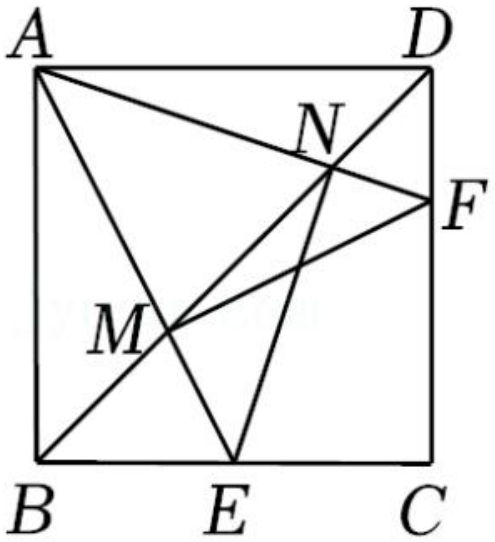
其中结论正确的个数是(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4



典型例题

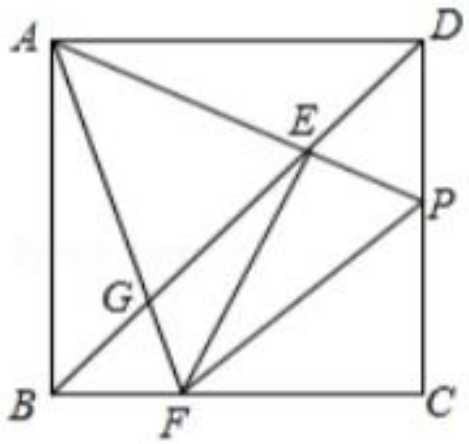
3. 如图，正方形 $ABCD$ 中，E 是 BC 的中点，F 在 CD 上，$CF=2DF$，连接 AE，AF 与对角线 BD 交于点 M，N，连接 MF，EN．给出结论：①$\angle EAF=45°$；②$AN\perp EN$；③$\tan\angle AMN=3$；④DN：MN：$BM=\sqrt{2}:\sqrt{5}:\sqrt{3}$．其中正确的是（　　）



A．①②③　　B．①②④　　C．①③④　　D．②③④

典型例题

2021高级自招　点 E 在正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上，$EF \perp AE$ 交 BC 于点 F，AE 的延长线交 CD 于点 P，AF 交 BD 于点 G，连接 PF，则下列结论中：① $EA = EF$；② $\angle DPF = 2\angle BGF$；③ $CF + 2BF = \sqrt{2}BE$；④ $BG^2 + DG^2 = 2DG \cdot GE$；⑤若 $DP = PC$，则 $PC : CF : FP = 3 : 4 : 5$；⑥若 $BD = \sqrt{2}BE$，则 $PF = 2DP$，$GE^2 = 2GB^2$．其中正确的结论有(　　)个．



A．6　　B．5　　C．4　　D．3

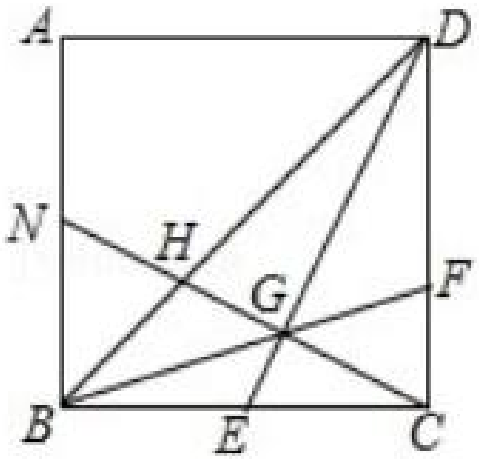
答案A

典型例题

如图，正方形 $ABCD$ 中，E 为 BC 的中点，$CG \perp DE$ 于 G，延长 BG 交 CD 于点 F，延长 CG 交 BD 于点 H，交 AB 于 N 下列结论：

① $DE = CN$；② $\dfrac{BH}{DH} = \dfrac{1}{2}$；③ $S_{\Delta DEC} = 3S_{\Delta BNH}$；④ $\angle BGN = 45°$；⑤ $GN + EG = \sqrt{2}BG$；

其中正确结论的个数有(　　)

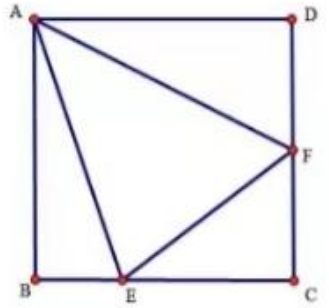


A．2 个　　B．3 个　　C．4 个　　D．5 个

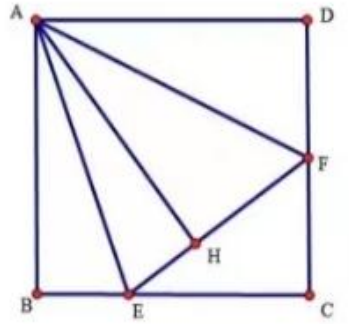
半角模型的系列结论

一、基础阶段

例题：如图 1，在正方形 ABCD 中，E、F 分别在 BC、CD 上，且∠EAF=45°，连接 EF；



（图 1）



（图 2）

结论 1：EF=BD+DF

结论 2：EA 平分∠BEF；FA 平分∠BFE；

补充条件：过点 A 作 AH⊥EF 交 EF 于点 H，如图 2，

结论 3：△ABE≌△AHE；△AHF≌△ADF；

结论 4：AH=AB=AD

结论 5：△AEF 的周长为正方形边长的 2 倍，即 $C_{\triangle CEF}=2AB$

结论:6：$S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ADF}=S_{\triangle AEF}$；$S_{\square ABCD}=2S_{\triangle AEF}+S_{\triangle EFC}$；

结论 7：当 BE=DF 时，$S_{\triangle AEF}$ 有最小值；$S_{\triangle CEF}$ 有最大值；

半角模型的系列结论

二、进阶篇

例题：如图 3，在正方形 ABCD 中，E、F 分别在 BC、CD 上，且∠EAF=45°，连接 EF；连接 BD，与 AE、AF 分别交于 M、N；

结论 8：（1）$MN^2=BM^2+DN^2$；（2）$2AN^2=DN^2+BN^2$；（3）$2AM^2=BM^2+DM^2$

结论 9：（1）$CE=\sqrt{2}DN$；（2）$CF=\sqrt{2}BM$；（3）$BE+DF=\sqrt{2}MN$；

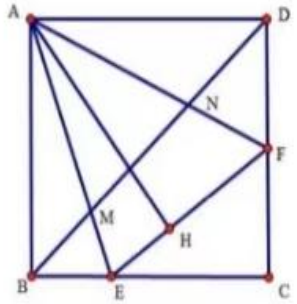
（4）$EF=\sqrt{2}MN$；（5）$BA+BE=\sqrt{2}BN$；（6）$DA+DF=\sqrt{2}DM$；

（7）$AB^2=BN*DM$；（8）$CE*CF=2BE*DF$；（9）$BE*DF+AH*EF=AB^2$；

结论 10：$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}S_{\triangle AEF}$；$S_{\triangle AMN}=S_{四边形 MEFN}$

结论 11：∠AEB=∠AEF=∠ANM；∠AFD=∠AFE=∠AMN；

△BME∽△AMN∽DFN∽△DMA∽△BAN∽△AFE；



（图 3）

半角模型的系列结论

三、高手篇

补充条件：连接 EN、MF，如图 4；

结论 12：△AMF、△ANE 为等腰 Rt△；

结论 13：A、N、E、B 四点共圆；A、M、F、D 四点共圆；C、F、N、M、E 五点共圆；

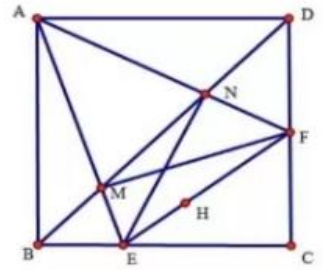
结论 14：（1）过点 E 作 EG⊥BC 交 BD 于点 G，求证：N 是 DG 的中点，如图 5；

（2）过点 F 作 FH⊥CD 交 BD 于点 H，求证：M 是 BH 的中点，如图 6；

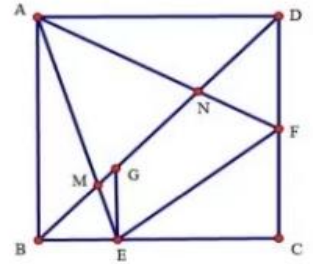
结论 15：（1）过点 E 作 EI⊥BD 于点 I，求证 $NI=\frac{1}{2}BD$，如图 7；

（2）过点 F 作 FJ⊥BD 于点 J，求证 $MJ=\frac{1}{2}BD$，如图 8；

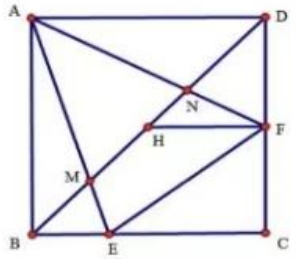
结论 16：$BN-DN=\sqrt{2}BE$；$DM-BM=\sqrt{2}DF$；



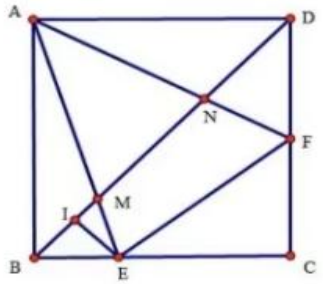
（图 4）



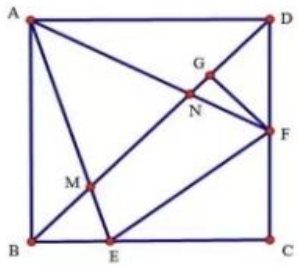
（图 5）



（图 6）



（图 7）



（图 8）

江游老师中考自招数学培优

(+13243830601)