一．数与式

01 实数

考点一．无理数

无理数概念：**无限不循环小数.**

无理数常见四类形式：（1）**开不尽的方根**：如$\sqrt{5}$、$\sqrt[3]{9}$等；

（2）π**系列**（即化简后含有π的数）：如2π、$3+\frac{2}{\pi}$等；

（3）**无限有规律但不循环的数**：如0.1010010001…、4.323323332…等；

（4）**某些三角函数值**，如$\sin 60°$、$\tan 30°$等.

【提醒】$\frac{\sqrt{2}}{2}$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{1}{\pi}$等属无理数，**非分数**；而0.10010001是有理数，注意观察.

考点二．绝对值

绝对值：一个数的绝对值就是表示这个数的**点与原点的距离**，即

$$|a|=\begin{cases}a(a>0)\\0(a=0)\\-a(a<0)\end{cases}$$，也可表示为$|a|=\begin{cases}a(a\geq 0)\\-a(a<0)\end{cases}$或$|a|=\begin{cases}a(a>0)\\-a(a\leq 0)\end{cases}$.

【提醒】（1）任何数的绝对值都大于等于零，即$|a|\geq 0$；

（2）若$|a|=|b|$，则$a=b$或$a=-b$；

（3）若绝对值内代数式整体为负，去绝对值符号时只需每项都变号，即

$$|a-b|=\begin{cases}a-b(a>b)\\0(a=b)\\-a+b(a<b)\end{cases}$$，$$|a+b|=\begin{cases}a+b(a+b>0)\\0(a+b=0)\\-a-b(a+b<0)\end{cases}$$.

【例题】若a、b、c为三角形三边长，请化简$|a+b+c|+|a-b-c|+|a+b-c|$.

解析：由三角形两边之和大于第三边、两边之差小于第三边可知，$a+b+c>0$、$a-b-c<0$、$a+b-c>0$，

所以，$|a+b+c|=a+b+c$

$|a-b-c|=-a+b+c$

$|a+b-c|=a+b-c$

所以，原式$=a+3b+c$.

考点三．算数平方根、二次根式

1．算数平方根：**如果一个正数的平方等于a，那么这个正数就叫做a的算数平方根**，记为$\sqrt{a}$.

规定 0 的算数平方根是 0，即$\sqrt{0}=0$.

【提醒】（1）勿把$\sqrt{a}$当平方根，例如错解：$\sqrt{4}=\pm 2$；

（2）$\sqrt{a}$的双重非负性：$a\geq 0$且$\sqrt{a}\geq 0$；

（3）$(\sqrt{a})^2=a$；

（4）$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a>0)\\0(a=0)\\-a(a<0)\end{cases}$，例如错解：$\sqrt{(-2)^2}=-2$.

【例题】$\sqrt{81}$的算术平方根是_____.

解析：先计算$\sqrt{81}=9$，9 的算术平方根是 3（千万别填 9）.

2．**二次根式（注明：属代数式）**：式子$\sqrt{a}\ (a\geq 0)$．其中a称被开方数，可以是数，也可以是代数式.

【提醒】$\sqrt{a}$有意义是指被开方数$a\geq 0$，例如要使代数式$\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$有意义，则$x=2$；

【例题】已知$y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}-3}{3}$，求$(x+y)^{2013}$的值.

解析：因为$x^2-1\geq 0,$且$1-x^2\geq 0,$

所以$x=1$或-1，则$y=-1$ 所以$(x+y)^{2013}=0$或-2^{2013}

3．**最简二次根式：**若二次根式满足被开方数的因数是整数，因式是整式；被开方数中不含能开得尽方的因数或因式，这样的二次根式叫做最简二次根式．

例如，$\sqrt{7}$、$a\sqrt{b}$；

例如反例，$\sqrt{8}$、$\sqrt{a^2b}$、$\sqrt{\frac{1}{3}}$、$\frac{3}{2\sqrt{2}}$．

考点四．非负数

1．**非负数：零和正数．**

2．**常见三种形式：**（1）$a^2\geq 0$；

（2）$|a|\geq 0$；

（3）$\sqrt{a}\geq 0(a\geq 0)$．

3．几个非负数和为 0，则这几个非负数都为 0．

【例题】若$(a-1)^2+|b-2|+\sqrt{c-3}=0$，求$a$、$b$、$c$的值．

解析：因为$(a-1)^2\geq 0$，$|b-2|\geq 0$，$\sqrt{c-3}\geq 0$，

所以，要使$(a-1)^2+|b-2|+\sqrt{c-3}=0$，则需$(a-1)^2=0$，$|b-2|=0$，$\sqrt{c-3}=0$

所以，$a=1$，$b=2$，$c=3$．

考点五．精确数位、有效数字、科学记数法

1．**精确数位：最后一个数字所处的数位．**例如：3.141 为精确到千分位．

【提醒】（1）无论最后一个数字是什么，包括 0，例如：3.1410 为精确到万分位；

（2）带单位的数字，在算数位时要把单位计算在内，例如：3.141 万为精确到十位，3.1410×10^6为精确到百位．

2．有效数字：**从左边第一个非零数字起到右边精确的数位止**的所有数字．例如：0.03141 的有效数字有 4 个，分别是 3、1、4、1．

【提醒】（1）**左起非零数字后面的零都算有效数字，**例如：0.031410 的有效数字有 5 个，分别是 3、1、4、1、0；

（2）**右到精确数位止**，包括带单位的数字，例如：3.141 万的有效数字有 4 个，分别是 3、1、4、1，3.1410×10^{6}的有效数字有 5 个，分别是 3、1、4、1、0.

3．科学记数法：把一个数写做$\pm a\times10^{n}$的形式，其中$1\le a<10$，n是整数．例如：321780000 用科学记数法表示为3.2178×10^{8}，-0.000032178 用科学记数法表示为-3.2178×10^{-5}.

【提醒】与精确数位或有效数字的结合，例如

（1）321780000 用科学记数法并精确到百万位为3.22×10^{8}；

（2）321780000 用科学记数法并精确到千位为3.21780×10^{8}；

（3）321780000 用科学记数法并保留 3 个有效数字为3.22×10^{8}；

（4）321780000 用科学记数法并保留 6 个有效数字为3.21780×10^{8}.

02 代数式

考点一．整式乘除法

（1）$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$（m、n 都是正整数）；

（2）$a^m \div a^n = a^{m-n}$（m、n 都是正整数，且 $a \neq 0$）；

（3）$(a^m)^n = a^{mn}$（m、n 都是正整数）；

（4）$(ab)^n = a^n b^n$（n 是正整数）；

（5）平方差：$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$；

（6）完全平方和：$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$，完全平方差：$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$；

（7）$a^0 = 1\ (a \neq 0)$；

（8）$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$（n 是正整数，且 $a \neq 0$），例如，$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$，$(\dfrac{1}{3})^{-2} = 3^2 = 9$．

【提醒】勿把负指数的负号提到代数式前面，例如错解：$3^{-2} = -3^2 = -9$．

【例题】计算：$|\pi - 4| - (-\dfrac{1}{2})^{-2} + \sqrt[3]{27} - (\pi - 2)^0$

解析：$|\pi - 4| - (-\dfrac{1}{2})^{-2} + \sqrt[3]{27} - (\pi - 2)^0$

$= 4 - \pi - 4 + 3 - 1$

$= 2 - \pi$

考点二．因式分解概念及因式分解

1．因式分解概念：**把一个多项式化成几个整式的积的形式**，叫做把这个多项式**因式分解**．

【提醒】概念三要素（1）分解前是多项式；（2）分解后的因式是整式；（3）乘积的形式．

例如反例：（1）$(x+2)(x-2) = x^2 - 4$，右边不是乘积形式，属整式乘法，与因式分解互逆；

（2）$x^2 - \dfrac{1}{y^2} = (x + \dfrac{1}{y})(x - \dfrac{1}{y})$，分解前后都是分式，不符合概念．

2．因式分解常用方法

（1）提公因式法：$ab+ac=a(b+c)$；

（2）公式法：①平方差：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，

②完全平方和：$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，

③完全平方差：$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$；

（3）分组分解法：分组后再进行提公因式法或公式法.

例如，$ac+ad+bc+bd=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)$；

【例题】①$21x^2-7x-3xy+y$　②$4x^2-y^2+4x-2y$　③$4x^2+4x+1-y^2$

$=(21x^2-7x)-(3xy-y)$　$=(4x^2-y^2)+(4x-2y)$　$=(4x^2+4x+1)-y^2$

$=7x(3x-1)-y(3x-1)$　$=(2x+y)(2x-y)+2(2x-y)$　$=(2x+1)^2-y^2$

$=(3x-1)(7x-y)$　$=(2x-y)(2x+y+2)$　$=(2x+y+1)(2x-y+1)$

（4）十字相乘法：口诀：拆两头，凑中间．例如，$a^2+(p+q)a+pq=(a+p)(a+q)$.

【例题】①$x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$

②$6x^2-x-1=(2x-1)(3x+1)$

【提醒】各因式要分解到不能再分解为止.

考点三．分式概念、意义、运算等

1．分式的意义：分母不等于 0.

例如，$\dfrac{1}{x+2}$ 要有意义，则需 $x\neq -2$.

2．分式值为 0：分母不等于 0，分子等于 0.

例如，$\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 值等于 0，则需 $\begin{cases}x^2-4=0\\x+2\neq 0\end{cases}$ 即 $x=2$.

3．分式的变号法则：分式的分子、分母与分式本身的符号，改变其中任何两个，分式的值不变.

例如，$\dfrac{-b}{a}=\dfrac{b}{-a}=-\dfrac{b}{a}$.

【提醒】提取负号必须是整个分子或分母整体的负号，例如错解：$\frac{-c+d}{a+b}=-\frac{c+d}{a+b}$.

4．分式的运算法则：（1）$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$；

（2）$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$；

（3）$(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}(n\text{为整数})$；

（4）$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$；

（5）通分：$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$.

【例题】化简 $(\frac{a}{a-1}-1)\div\frac{1}{a^2-2a+1}$.

解：原式 $=(\frac{a}{a-1}-\frac{a-1}{a-1})\cdot(a-1)^2$

$=\frac{1}{a-1}\cdot(a-1)^2$

$=a-1$

二．方程与不等式

01 二元一次方程（组）

考点一．二元一次方程组解法

二元一次方程解法：解二元一次方程组的基本思想方法是“消元”，即把“二元”转化为“一元”.

基本方法有两种

（1）代入消元法

（2）加减消元法

【例题】解方程组 $\begin{cases}x+2y=6①\\2x+y=9②\end{cases}$

解法一（代入消元法）：

由①式得，$x=6-2y$③

将③式代入②得，$2(6-2y)+y=9$

解得，$y=1$

将 $y=1$ 代入③式得，$x=4$

所以，方程组的解为 $\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$.

解法二（加减消元法）：

①×2 得，$2x+4y=12$③

③-②得，$3y=3$

解得，$y=1$

将 $y=1$ 代入①式得，$x=4$

所以，方程组的解为 $\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$.

【提醒】代入消元法和加减消元法并无优劣之分，解题时选择最适合的方法求解即可.

02 一元二次方程

考点一．一元二次方程的概念

1．一元二次方程：只含有**一个未知数**，并且未知数的**最高次数是 2** 的**整式方程**，称一元二次方程．

一般式为 $ax^2+bx+c=0$（a、b、c 都是常数，且 $a\neq 0$），

其中 ax^2 **为二次项，** a **为二次项系数，** bx **为一次项，** b **为一次项系数，** c **为常数项．**

【提醒】**（1）必须是整式方程；**例如反例：关于 x 的方程 $x^2-\frac{1}{x}+1=0$，$\frac{x^3}{x}-2x=3$ 都为分式方程，

$\sqrt{x^2+1}=3x$ 为无理式方程．

（2）必须能化简为一般式；

例如：$(2x-1)^2=4x^2+3x$，实际为一元一次方程，不能只看表面．

（3）**“明确未知数是 x ”和“确保二次项系数 $a\neq 0$ ”，**两前提条件缺一不可．

例如：$(m-1)x^2+3x-4=0$，这个等式并不能称为关于 x 的一元二次方程，

应补充成“$(m-1)x^2+3x-4=0$（m 是常数，且 $m\neq 1$）”或“**关于 x 的方程**

$(m-1)x^2+3x-4=0(m\neq 1)$”．

考点二．一元二次方程的解法

常用方法有四种

1．**直接开方法：**把一个形如 $x^2=a$ 或 $(mx+n)^2=a(a\geq 0)$ 的一元二次方程的两边直接开平方，

称直接开方法．

【例题】解方程 $3(x-2)^2=6$．

解：$(x-2)^2=2$

$x-2=\pm\sqrt{2}$　　$x=2\pm\sqrt{2}$.

2．**配方法：**把方程的左边配成**含有未知数的完全平方式**，另一边是一个常数，再使用直接开方法求解，称配方法.

【例题】解方程 $x^2-6x+1=0$

解：$x^2-6x=-1$

$x^2-6x+9=-1+9$

$(x-3)^2=8$

$x-3=\pm2\sqrt{2}$

$x=3\pm2\sqrt{2}$.

3．**公式法：**利用配方法解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，当 $b^2-4ac\geq0$ 时，方程的根是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

【例题】解方程 $3x^2+x-5=0$.

解：$b^2-4ac=1^2-4\times3\times(-5)=61>0$

所以，$x=\frac{-1\pm\sqrt{61}}{2\times3}=\frac{-1\pm\sqrt{61}}{6}$.

4．**因式分解法：**转将方程一边转化为 0，另一边分解成两个一次因式的乘积，根据“ $ab=0\Rightarrow a=0$ 或 $b=0$ ”把原方程转化成两个一次方程求解，称因式分解法.

【例题】解方程 $3x^2-x=4$

解：$3x^2-x-4=0$

$(3x-4)(x+1)=0$

所以，$x_1=\frac{4}{3}$，$x_2=-1$

【提醒】一元二次方程四种解法并无优劣之分，解题时选择最适合的方法求解即可.

考点三．一元二次方程根的判别式

1．判别式：把b^2-4ac称作一元二次方程的判别式，用符号“Δ”表示，即$\Delta=b^2-4ac$.

2．根的判别

（1）$\Delta>0\Leftrightarrow$方程有两个不相等的实数根；

（2）$\Delta=0\Leftrightarrow$方程有两个相等的实数根；

（3）$\Delta<0\Leftrightarrow$方程没有实数根；

（4）$\Delta\geq0\Leftrightarrow$**方程有实数根**.

【提醒】一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$中，**只要a,c异号，则方程必有两个不相等实数根**.

考点四．一元二次方程韦达定理

1．韦达定理：如果方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两个实数根是x_1、x_2，那么$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

【提醒】使用韦达定理的前提是一元二次方程有实数根即$\Delta\geq0$.

2．常见关于两根的代数式变形

（1）$(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+x_1+x_2+1$；

（2）$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$；

（3）$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$；

（4）$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$

（5）$\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}{x_1x_2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$；

3．两根的符号关系

（1）两根同正，则需满足$\begin{cases}\Delta \geq 0\\ x_1+x_2>0\\ x_1x_2>0\end{cases}$；

（2）两根同负，则需满足$\begin{cases}\Delta \geq 0\\ x_1+x_2<0\\ x_1x_2>0\end{cases}$；

（3）两根异号，则需满足$\begin{cases}\Delta >0\\ x_1x_2<0\end{cases}$.

03 分式方程

考点一．分式方程、增根概念

1．分式方程：**分母中含有未知数的方程称分式方程**

2．分式方程增根：增根是分式方程去分母后所得的根，但不是原分式方程的根，因为它使原方程中某个分母为零，即没有意义．

【例题】若关于 x 的方程 $\frac{k+2}{x-3}+2=\frac{x-4}{x-3}$ 有增根，求 k 的值．

解析：方程两边同时乘以（ $x-3$ ），得（化为整式方程）

$$k-2+2(x-3)=x-4$$

因为原分式方程有增根，所以增根为 $x=3$（猜想增根）

将 $x=3$ 代入得，$k=-3$　　（代入增根至整式方程）

考点二．解分式方程

解分式方程步骤：去分母，解整式方程，验根．

【例题】解方程 $\frac{x^2-3x}{x^2-1}+\frac{2x-1}{x-1}=0$．

解：两边同乘 x^2-1，得 $x^2-3x+(2x-1)(x+1)=0$

整理，得 $3x^2-2x-1=0$

$(3x+1)(x-1)=0$

解得 $x_1=-\frac{1}{3}$，$x_2=1$　　**经检验，$x=1$ 是原方程增根．**

所以，$x=-\frac{1}{3}$是原方程根.

【提醒】**解分式方程**，最后一定**不要忘记验根**，特别是在应用题中.

04 一元一次不等式

考点一．不等式性质

不等式的基本性质：

（1）不等式两边都加上（或减去）同一个数或同一个整式，不等号的方向不变；

（2）不等式两边都乘以（或除以）同一个正数，不等号的方向不变；

（3）不等式两边都乘以（或除以）同一个负数，不等号的方向改变.

【提醒】若$a>b$，c 非零，则$ac^2\geq bc^2$；反之，若$ac^2>bc^2$，则$a>b$.

考点二．一元一次不等式（组）解法

1．一元一次不等式的解法

解一元一次不等式的一般步骤：去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为 1.

【例题】解不等式$\frac{x-3}{4}\geq 1+\frac{2x-5}{6}$.

解：去分母，得$3(x-3)\geq 12+2(2x-5)$

去括号，得$3x-9\geq 12+4x-10$

移项，得$-4x+3x\geq 9+12-10$

合并同类项，得$-x\geq 11$

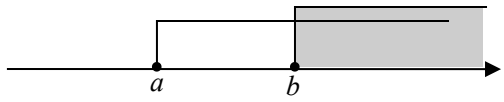
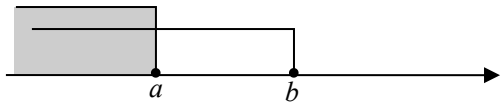
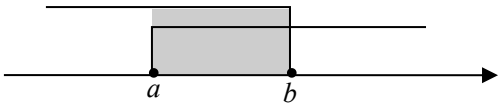
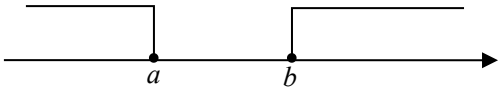
系数化为 1，得$x\leq -11$，即为不等式解集.

2．一元一次不等式组的解法

（1）分别求出不等式组中各个不等式的解集

（2）利用数轴求出这些不等式的解集的公共部分，即这个不等式组的解集.

由两个一元一次不等式组成的解集的四种情况见下表：

不等式组 $(a<b)$	数轴图示	解集	口诀
$\begin{cases}x\geq a\\x\geq b\end{cases}$		$x\geq b$	同大取大
$\begin{cases}x\leq a\\x\leq b\end{cases}$		$x\leq a$	同小取小
$\begin{cases}x\geq a\\x\leq b\end{cases}$		$a\leq x\leq b$	大小小大中间找
$\begin{cases}x\leq a\\x\geq b\end{cases}$		无解	大大小小解不了

初升高衔接知识

1 从计算角度：解一元一次不等式是高一必修 1 中解一元二次不等式的基础，也是解分式不等式的基础

2 从集合命题角度，她是“若 p 则 q”形式命题中充分与必要条件的基础知识

三．函数

01 平面直角坐标系及函数概念

考点一．点的坐标

不同位置点的坐标符号特征

（1）象限内点的坐标符号特征

点 $P(x，y)$ 在第一象限 $\Leftrightarrow x>0，y>0$；

点 $P(x，y)$ 在第二象限 $\Leftrightarrow x<0，y>0$；

点 $P(x，y)$ 在第三象限 $\Leftrightarrow x<0，y<0$；

点 $P(x，y)$ 在第四象限 $\Leftrightarrow x>0，y<0$．

（2）坐标轴上的点的坐标符号特征

点 $P(x，y)$ 在 x 轴上 $\Leftrightarrow y=0$，x 为任意实数；

点 $P(x，y)$ 在 x 轴上 $\Leftrightarrow x=0$，y 为任意实数；

点 $P(x，y)$ 既在 x 轴上，又在 y 轴上 $\Leftrightarrow x$，y 同时为 0，即点 P（0，0）.

（3）两条坐标轴夹角平分线上点的坐标的特征

点 $P(x，y)$ 在第一、三象限夹角平分线上 $\Leftrightarrow x$ 与 y 相等；

点 $P(x，y)$ 在第二、四象限夹角平分线上 $\Leftrightarrow x$ 与 y 互为相反数．

（4）和坐标轴平行的直线上点的坐标的特征

位于平行于 x 轴的直线上的各点的纵坐标相同；

位于平行于 y 轴的直线上的各点的横坐标相同．

（5）点关于坐标轴或原点对称点的符号特征

点 $P(x，y)$ 关于 x 轴对称的点坐标为 $P'(x，-y)$；

点 $P(x，y)$ 关于 y 轴对称的点坐标为 $P'(-x，y)$；

点 $P(x，y)$ 关于原点对称的点坐标为 $P'(-x，-y)$．

5．点与坐标轴、点与原点、点与点之间距离

（1）点与坐标轴：点 $P(x，y)$ 与 x 轴距离为 $|y|$，与 y 轴距离为 $|x|$；

（2）点与原点：点 $P(x，y)$ 与原点的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}$.

（3）点与点之间距离：$P(x_1，y_1)$ 与 $Q(x_2，y_2)$ 的距离为 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，即两点距离公式.

02 一次函数

考点一．一次函数与正比例函数概念

1．一次函数：如果 $y=kx+b$ (k、b 是常数，且 $k\neq 0$)，那么 y 称为 x 的一次函数．

2．正比例函数：当 $b=0$ 时，一次函数 $y=kx+b$ 就是 $y=kx$ ($k\neq 0$)，那么 y 称为 x 的正比例函数．

【提醒】（1）正比例函数是一次函数的特例，属于一次函数；

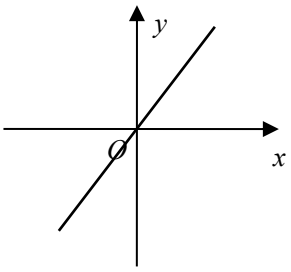
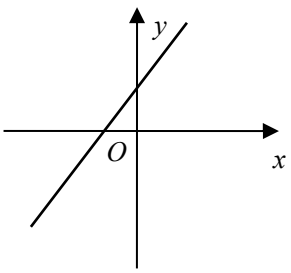
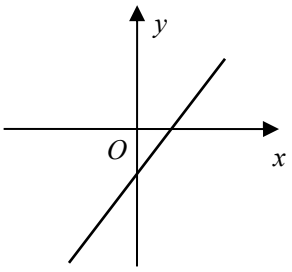
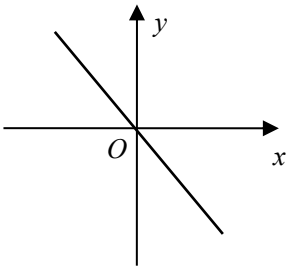
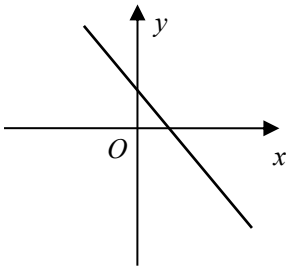
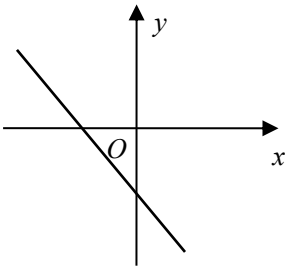
（2）当 $k=0$ 时， $y=b$ (b 是常数)，这样的函数称为常数函数，它不是一次函数．

（3）直线 $y=b$ (b 是常数)是一条平行于 x 轴的直线，直线 $y=0$ 是一条与 x 轴重合的直线．

（4）直线 $x=b$ (b 是常数)是一条平行于 y 轴的直线，直线 $x=0$ 是一条与 y 轴重合的直线．

考点二．一次函数与正比例函数的图像及性质

1．图像

	$b=0$	$b>0$	$b<0$	增减性
$k>0$				y 随 x 的增大而增大
$k<0$				y 随 x 的增大而减小

【基本模型】直线 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+b$ 与 x 轴夹角为 $30°$．

直线 $y=\pm\sqrt{3}x+b$ 与 x 轴夹角为 $60°$．

直线 $y=\pm x+b$ 与 x 轴夹角为 $45°$.

2．图像特征

（1）一次函数图像是一条直线；

（2）一次函数 $y=kx+b$ 是经过点 $(0，\ b)$ 的直线；

（3）正比例函数 $y=kx$ 是经过原点 $(0，\ 0)$ 的直线.

3．一次函数图像的画法

（1）当 $b\neq 0$ 时，通常取 $(0，\ b)$、$(-\frac{b}{k},0)$ 两点，就可以画出一次函数 $y=kx+b$ 的图像；

（2）当 $b=0$ 时，通常取 $(0，\ 0)$、$(1，\ k)$ 两点，就可以画出正比例函数 $y=kx$ 的图像.

考点三．两直线位置关系及平移

1．若有两直线分别是 $y_1=k_1x+b_1$ 和 $y_2=k_2x+b_2$，则：

（1）平行 $\Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$；

（2）重合 $\Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$；

（3）相交 $\Leftrightarrow k_1\neq k_2$；

（4）垂直 $\Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$.

2．直线的平移：平移过程前后 k 值不变，平移法则为“上加下减，左加右减”.

例如，（1）直线 $y=2x+3$ 向下平移 1 个单位，解析式变为 $y=2x+3-1=2x+2$；

（2）直线 $y=2x+3$ 向左平移 1 个单位，解析式变为 $y=2(x+1)+3=2x+5$.

【提醒】左右平移时候的加减，是针对 x 作改变，非直接在解析后作加减，如上例（2）.

考点四．待定系数法求解析式

待定系数法：先设出式子中的未知数，再根据条件求出未知数，从而写出这个式子的方法，称待定系数法.

【例题】已知直线经过点(1，2)、(3，4)，请求其解析式.

解：设直线解析式为 $y=kx+b$，

代入点(1，2)、(3，4)，得 $\begin{cases}2=k+b\\4=3k+b\end{cases}$，

解方程组得 $\begin{cases}k=1\\b=1\end{cases}$，

所以，直线解析式为 $y=x+1$.

【基本模型】已知点 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)，直线 AB 解析式为 $y=kx+b$，则可得到：$k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

03 反比例函数

考点一．反比例函数概念

1．反比例函数：函数 $y=\frac{k}{x}(k$ 是常数，$k\neq 0)$称为反比例函数．其中自变量 x 的取值范围是 $x\neq 0$．

（1）也可写成 $y=kx^{-1}(k$ 是常数，$k\neq 0)$；

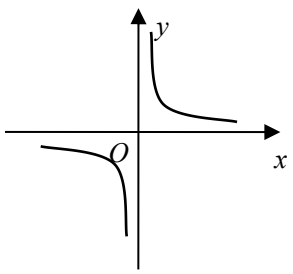
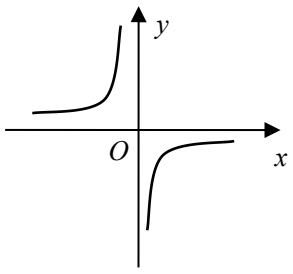
（2）y 是 x 的反比例函数 $\Leftrightarrow$ x 与 y 成反比例．

【提醒】反比例函数默认为是 x 与 y 成反比例．

例如反例：$y+1=\frac{2}{x}$，$y=\frac{1}{x+3}$，都不是反比例函数，但是可以称为 $y+1$ 与 x 成反比例，y 与 $x+3$ 成反比例．

考点二．反比例函数图像及性质

1．图像及性质

反比例函数	$y=\frac{k}{x}(k$ 是常数，$k\neq 0)$	
k 符号	$k>0$	$k<0$
图像		

性质	（1）图像处在第一、三象限； （2）在每个象限内，y 随 x 的增大而减小.	（1）图像处在第二、四象限； （2）在每个象限内，y 随 x 的增大而增大.

【提醒】在描述反比例函数增减性时，必须明确“在每个象限内”或明确“x 取值范围”.

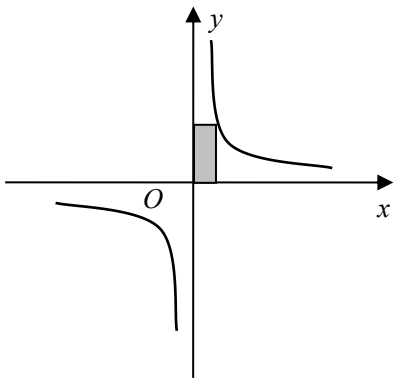
考点三．反比例函数图像几何意义

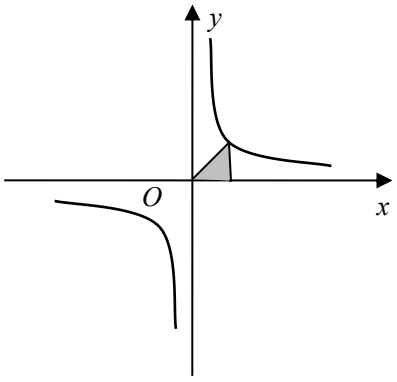
1．几何意义

（1）经过双曲线上任意一点作 x 轴和 y 轴的垂线，所得矩形面积为 $|k|$；

（2）经过双曲线上任意一点作 x 轴或 y 轴得垂足，连这个点、原点、垂足所得直角三角形面积为 $\frac{|k|}{2}$.

如图：





04 二次函数

考点一．二次函数的概念及 $y=ax^2$ 图像及性质

1．二次函数一般式：如果 $y=ax^2+bx+c$ (a、b、c 是常数，且 $a\neq 0$)，那么 y 称为关于 x 的二次函数，其中 ax^2 为二次项，a 为二次项系数；bx 为一次项，b 为一次项系数；c 为常数项．

【提醒】（1）$y=ax^2(a\neq 0)$、$y=ax^2+bx(a\neq 0)$、$y=ax^2+c(a\neq 0)$ 只是二次函数的特殊形式；

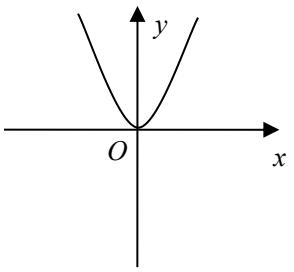
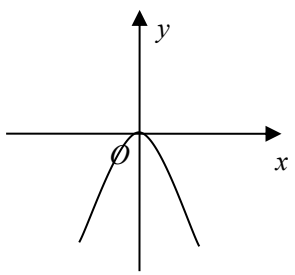
（2）右边必须是关于 x 的二次整式，例如反例，$y=x^2+\dfrac{x^2}{x}+3$，$y=3x^2+\sqrt{x}$，都不是二次函数；

（3）必须明确 $a\neq 0$，例如反例，函数 $y=(m-1)x^2+x+2$，不一定是二次函数．

2．二次函数图像

（1）二次函数图像是一条抛物线；

（2）二次函数 $y=ax^2(a\neq 0)$ 的图像及性质，如下表：

$y=ax^2(a\neq 0)$	$a>0$	$a<0$
图像		
开口方向	向上	向下

顶点坐标	(0，0)	(0，0)
对称轴	y 轴（或称直线 $x=0$ ）	y 轴（或称直线 $x=0$ ）
增减性	当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小； 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大.	当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大； 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小.
最值	当 $x=0$ 时，$y_{\min}=0$	当 $x=0$ 时，$y_{\max}=0$

3．抛物线形状：即抛物线开口大小，$|a|$越大，开口越小.

考点二．抛物线的三种解析式及性质

1．二次函数的解析式有三种形式：

（1）一般式：$y=ax^2+bx+c$ (a、b、c是常数，且$a\neq 0$)；

（2）顶点式：$y=a(x-h)^2+k$ (a、b、c是常数，且$a\neq 0$)；

（3）两根式（或称交点式）：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$ (a、x_1、x_2是常数，且$a\neq 0$)

【提醒】x_1、x_2为抛物线与x轴交点横坐标值，若抛物线与x轴只有一个交点即为$x_1=x_2$，若抛物线与x轴没有交点，则不能表示为两根式.

2．由各种解析式求抛物线性质公式或方法，如下表

二次函数	$y=ax^2+bx+c$	$y=a(x-h)^2+k$	$y=a(x-x_1)(x-x_2)$
开口方向	略	略	略
对称轴	直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$	直线 $x=h$	直线 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$
顶点	$(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$	$(h，k)$	$(\dfrac{x_1+x_2}{2},-\dfrac{a(x_1-x_2)^2}{2})$

增减性	略	略	略
最值	$y_{最值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	$y_{最值}=k$	$y_{最值}=-\dfrac{a(x_1-x_2)^2}{2}$
与 x 轴交点	解方程 $ax^2+bx+c=0$	解方程 $a(x-h)^2+k=0$	$(x_1,0)$、$(x_2,0)$
与 y 轴交点	$(0,\ c)$	$(0,\ ah^2+k)$	$(0,\ ax_1x_2)$

3．待定系数法求解析式

（1）当已知抛物线顶点坐标时，选用顶点式较方便；

（2）当已知抛物线与 x 轴交点坐标时，选用两根式较方便；

（3）当已知抛物线线上任意三点坐标时，选用一般式．

【基本模型】抛物线与 x 轴相交于两点 $A(x_1,\ 0)$，$B(x_2,\ 0)$，则两交点距离 $AB=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$．

考点三．抛物线的运动

1．平移

平移法则：上加下减、左加右减．

【提醒】以上是函数平移法则，点的平移法则为“上加下减、左减右加”．

2．对称

（1）关于 x 轴作轴对称：$y\to -y$；

（2）关于 y 轴作轴对称：$x\to -x$；

（3）关于原点作中心对称（或称关于原点旋转 180°）：$x\to -x$ 且 $y\to -y$．

【例题】请求将抛物线 $y=x^2-2x-3$ 关于 y 轴作轴对称后图像的解析式．

解：关于 y 轴作轴对称后图像的解析式为 $y=(-x)^2-2(-x)-3=x^2+2x-3$．

【提醒】函数关于坐标轴的对称同点关于坐标轴对称的法则相同．

【基本模型】已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$，求其关于 x 轴、y 轴、原点对称的抛物线的解析式.

（1）抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 关于 x 轴对称的抛物线的解析式：$y=-ax^2-bx-c$

（2）抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 关于 y 轴对称的抛物线的解析式：$y=ax^2-bx+c$

（3）抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 关于原点对称的抛物线的解析式：$y=-ax^2+bx-c$

3．绕顶点旋转 180°（或称关于顶点作中心对称）

将解析式转化为 $y=a(x-h)^2+k$ 形式，然后将 a 变为 $-a$.

【例题】请求将抛物线 $y=x^2-2x-3$ 绕顶点旋转后图像的解析式.

解：原抛物线 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$

旋转后变为 $y=-(x-1)^2-4$ 即 $y=-x^2+2x-5$.

考点四．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的系数符号问题

1．a、b、c、Δ 等基本符号判断

（1）$a \Leftrightarrow$ 开口方向

$a>0 \Leftrightarrow$ 开口向上；

$a>0 \Leftrightarrow$ 开口向下.

（2）$c \Leftrightarrow$ 与 y 轴交点位置

$c>0 \Leftrightarrow$ 与 y 轴交于正半轴；

$c<0 \Leftrightarrow$ 与 y 轴交于负半轴；

$c=0 \Leftrightarrow$ 与 y 轴交于原点.

（3）a，$b \Leftrightarrow$ 对称轴位置

a，b 同号 $\Leftrightarrow$ 对称轴在 y 轴左侧；

a，b 异号 $\Leftrightarrow$ 对称轴在 y 轴右侧；

$b=0 \Leftrightarrow$ 对称轴即为 y 轴.

口诀：“左同右异”.

（4）$\Delta \Leftrightarrow$ 与 x 轴交点个数

$\Delta>0 \Leftrightarrow$ 与 x 轴有两个交点；

$\Delta=0 \Leftrightarrow$ 与 x 轴有一个交点；

$\Delta<0 \Leftrightarrow$ 与 x 轴有没有交点.

2．抛物线特殊位置

（1）顶点在原点 $\Leftrightarrow b=0$，$c=0$；

（2）顶点在 x 轴上 $\Leftrightarrow \Delta=0$；

（3）顶点在 y 轴上（或对称轴是 y 轴）$\Leftrightarrow b=0$；

（4）抛物线过原点 $\Leftrightarrow c=0$；

（5）函数值 y 恒为正数（或抛物线在 x 轴上方）$\Leftrightarrow a>0$，$\Delta<0$；

（6）函数值 y 恒为负数（或抛物线在 x 轴下方）$\Leftrightarrow a<0$，$\Delta<0$.

3．特殊系数组合

（1）$a+b+c$ 的符号 $\Leftrightarrow$ 当 $x=1$ 时，点纵坐标值 y 的符号；

$a-b+c$ 的符号 $\Leftrightarrow$ 当 $x=-1$ 时，点纵坐标值 y 的符号；

$4a+2b+c$ 的符号 $\Leftrightarrow$ 当 $x=2$ 时，点纵坐标值 y 的符号；

$4a-2b+c$ 的符号 $\Leftrightarrow$ 当 $x=-2$ 时，点纵坐标值 y 的符号；…

（2）$2a+b$、$2a-b$、$a+b$、$a-b$ 的符号，可以借助对称轴 $-\dfrac{b}{2a}$ 值与常数 1 或 0 比较大小转化得来.

例如，开口向下的抛物线的对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}>1$，则 $b>-2a \Rightarrow 2a+b>0$.

考点五．二次函数最值的实际应用

1．在自变量 x 取值范围是全体实数时，最值都为顶点纵坐标值．

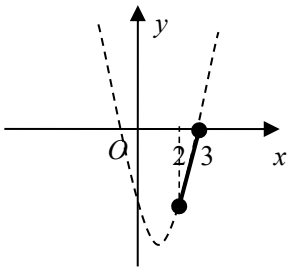
二次函数	$y=ax^2+bx+c$	$y=a(x-h)^2+k$	$y=a(x-x_1)(x-x_2)$
最值	$y_{最值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	$y_{最值}=k$	$y_{最值}=-\dfrac{a(x_1-x_2)^2}{2}$

2．在实际应用时，自变量 x 取值范围可能是某一段区间、或只能取正整数等

此时，需要依靠图像的最高点或最低点来读取及计算函数最值．

【例题】求二次函数 $y=x^2-2x-3(2\le x\le 3)$ 的最值．

解：作图或联想图像，$2\le x\le 3$ 区间的图像（实线部分）才是 $y=x^2-2x-3(2\le x\le 3)$ 的图像．



所以，当 $x=2$ 时取最小值为-3，当 $x=3$ 时取最大值为 0．

四．空间与图形

01 三角形

考点一．三角形基本边角关系

1．三边关系定理及推论

（1）定理：三角形的两边之和大于第三边；

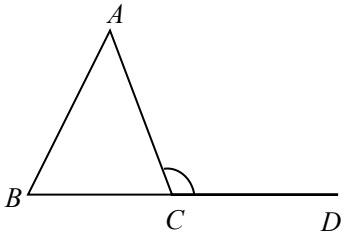
（2）推论：三角形的两边之差小于第三边.

【提醒】三角形三边关系定理及推论的作用：① 判断三条已知线段能否组成三角形；

② 当已知两边时，可确定第三边的范围；

③ 证明线段不等关系.

2．内角和定理及推论



（1）定理：三角形三个内角和等于 180°.

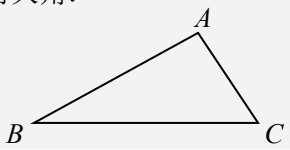
（2）推论：① 直角三角形的两个锐角互余；

② 三角形的一个外角等于和它不相相邻的来两个内角的和．如右上图，$\angle ACD=\angle A+\angle B$；

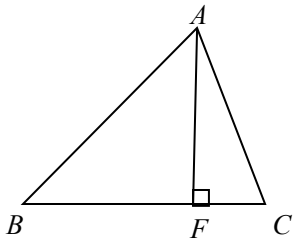
③ 三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角.

【提醒】在同一个三角形中，等角对等边，等边对等角，大角对大边，大边对大角.

如图，$\angle B<\angle C \Leftrightarrow AC<AB$.



3．三角形的面积=$\frac{1}{2}$×底×高．如图，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AF$.

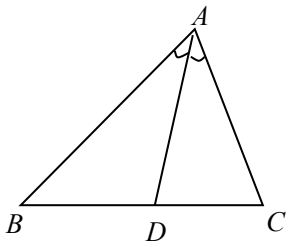


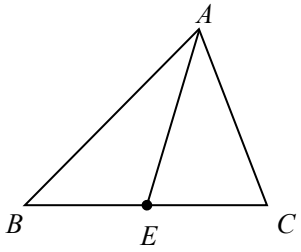
4．角平分线、中线、高线

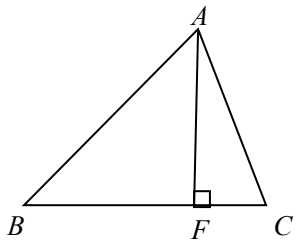
（1）角平分线：三角形的一个角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点和交点间的线段称三角形的角平分线．如左下图．

（2）中线：在三角形中，连接一个顶点和它对边的中点的线段称三角形的中线．如中下图．

（3）高线：从三角形一个顶点向它的对边做垂线，顶点和垂足之间的线段称三角形的高线（简称三角形的高）．如右下图．

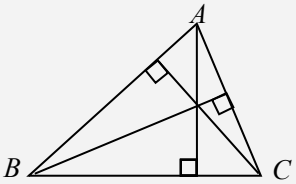


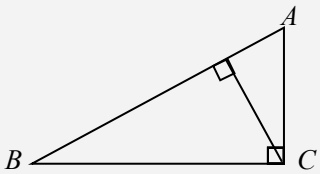


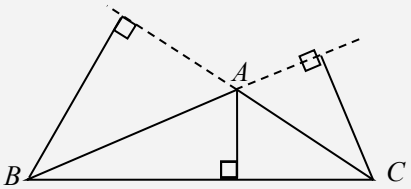


【提醒】① 三角形的角平分线、中线、高线都是线段；

② 三角形的角平分线、中线都在三角形的内部且都交于一点，而高线可能在三角形内部，或边上、或外部，它们（或延长线）相交于一点．如下图，三种三角形高线．







考点二．全等三角形

1．三角形全等的判定

（1）边角边定理(SAS)：有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等；

（2）角边角定理(ASA)：有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等；

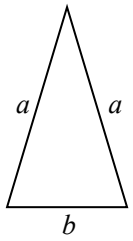
（3）边边边定理(SSS)：有三边对应相等的两个三角形全等；

（4）斜边、直角边定理(HL)：有斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等．

【提醒】边边角不能证全等．

考点三．等腰、等边三角形

1．等腰三角形



（1）性质

① 两个底角相等；

② 三线合一：等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高重合；

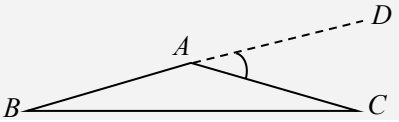
③ 等腰三角形的三边关系：设腰长为a，底边长为b，则$2a>b$；如图．

【提醒】例如，腰长为1，底边长为2的等腰三角形不存在．

④ 等腰三角形的三角关系：设顶角为顶角为$\angle A$，底角为$\angle B$、$\angle C$，则$\angle A$=180°—2$\angle B$，$\angle B=\angle C=\dfrac{180°-\angle A}{2}$；

【提醒】顶角的外角等于底角的两倍．

如图，等腰△ABC，有外角$\angle CAD$=2$\angle B$=2$\angle C$．



⑤ 等腰三角形的底角只能为锐角，不能为钝角（或直角），但顶角可为钝角（或直角）；

⑥ 等腰直角三角形的两个底角相等且等于45°．

（2）判定

① 等角对等边；

② 三线合一的三角形是等腰三角形．

2．等边三角形

（1）判定

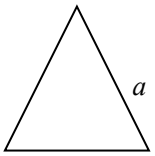
① 三条边都相等的三角形是等边三角形．

② 有两个角是60°（或三个角都相等）的三角形是等边三角形；

③ 有一个角是60°的等腰三角形是等边三角形．

（2）等边三角形面积公式

若边长为a，则$S_{等边\Delta}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$．



02 相似三角形

考点一：黄金分割

1．黄金分割：把线段 AB 分成两条线段 AC 和 BC（$AC>BC$），且使 AC 是 AB 和 BC 的比例中项，称把线段 AB 黄金分割．

C 点称作线段 AB 的黄金分割点．

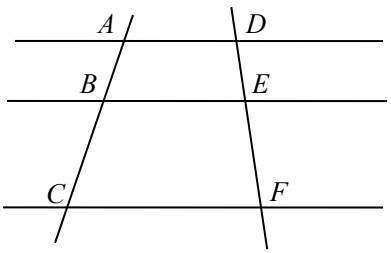
2．黄金比：C 点把线段 AB 黄金分割后，$\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，这个比值称黄金比．

【提醒】0.618 不是黄金比，只是黄金比的近似值．

考点二．平行线分线段成比例

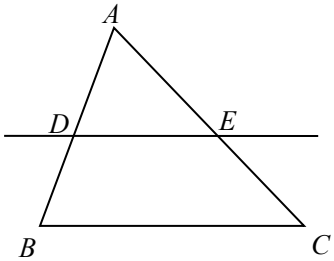
1．定理：三条平行线截两条直线，截得的对应线段成比例．

即如图，已知直线 $AD//BE//CF$，则 $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$．



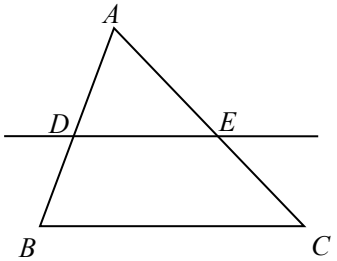
2．推论：平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边延长线），所得的对应线段成比例．

即如图，已知直线 $DE//BC$，则 $\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC}$．



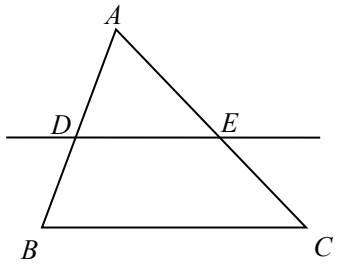
推论逆定理：如果一条直线截三角形的两边（或两边延长线）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边．

即如图，已知 $\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}$（或 $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$ 或 $\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC}$），则直线 $DE//BC$



3．三角形一边的平行线性质：平行于三角形的一边，并且和其他两边相交的直线，所截得的三角形的三边与原三角形三边对应成比例．

即如图，已知直线 $DE//BC$，则 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$．



考点四．相似三角形概念、判定、性质

1．相似三角形

（1）概念：对应角相等、对应边成比例的三角形，称相似三角形．

（2）相似比：相似三角形对应边的比称相似比，或称相似系数．

（3）相似三角形判定

① 基本定理：平行于三角形的一边的直线和其他两边（或两边延长线）相交，所构成的三角形与原三角形相似；

② 两角对应相等的两三角形相似；

③ 两边对应成比例且夹角相等的两三角形相似；

④ 三边对应成比例的两三角形相似．

⑤ 如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和直角对应成比例，那么这两个直角三角形相似．

（4）相似三角形性质

① 相似三角形对应角相等；

② 相似三角形对应线段（边、角平分线、中线、高线）成比例；

③ 相似三角形的周长比等于相似比；

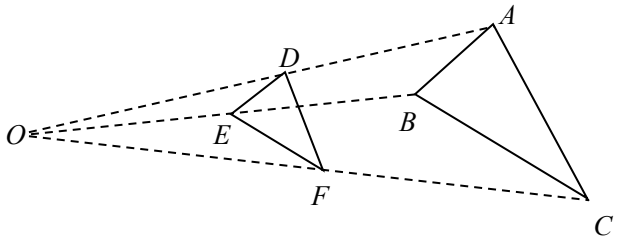
④ 相似三角形的面积比等于相似比的平方．

考点四．位似图形

1．位似图形

（1）概念：两个多边形不仅相似，而且对应点的连线相交于一点，像这样的两个图形称位似图形．这个点称位似中心．

如图，△ABC 与△DEF 位似，O 为位似中心．



（2）位似比：位似图形的相似比．

如图，位似比 $=\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{FD}{CA}$ 或位似比 $=\dfrac{OD}{OA}=\dfrac{OE}{OB}=\dfrac{OF}{OC}$．

考点五．中位线

1．三角形的中位线

（1）概念：连接三角形两边中点的线段称三角形的中位线．

【提醒】要区别三角形中线与中位线．

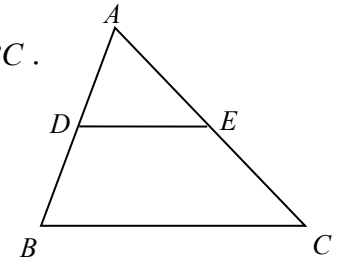
（2）中位线性质定理及推论

① 三角形中位线定理：三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半．

即如图，已知 D、E 分别是 AB、AC 中点，则 $DE//BC$，且 $DE=\dfrac{1}{2}BC$．

② 推论：经过三角形一边中点做另一边平行线，必平分第三边．

即如图，已知 D 是 AB 中点，且 $DE//BC$，则 E 是 AC 中点．



【提醒】（1）三角形中位线定理的作用，可以证明两条直线平行，可以证明线段的倍分关系．

（2）常用结论：结论 1：三条中位线组成一个三角形，其周长为原三角形周长的一半；

结论 2：三条中位线将原三角形分割成四个全等的三角形；

结论 3：三条中位线将原三角形划分出三个面积相等的平行四边形；

结论 4：三角形一条中线和与它相交的中位线互相平分；

结论 5：三角形中任意两条中位线的夹角与这夹角所对的三角形的顶角相等.

2．梯形中位线

（1）概念：连结梯形两腰中点的线段.

（2）梯形中位线性质定理及推论

① 梯形中位线定理：梯形的中位线平行于底边，并且等于上下底和的一半.

② 推论：经过梯形一腰中点做底边平行线，必平分另一腰.

3．用中位线表示三角形、梯形面积

（1）三角形面积＝三角形的中位线×三角形的高；

（2）梯形面积=梯形的中位线×梯形的高.

04 解直角三角形

考点一．直角三角形的性质

1．直角三角形两锐角互余．

2．勾股定理：直角三角形两直角边 a，b 的平方和等于斜边 c 的平方，即 $a^2+b^2=c^2$．

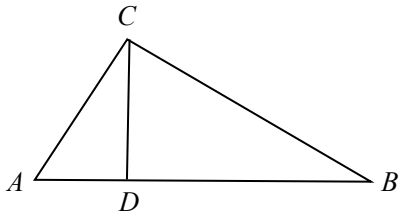
3．直角三角形的斜边上的中线等于斜边的一半．

4．直角三角形中，30°所对直角边等于斜边的一半．

5．两直角边的积等于斜边与斜边上高的积．

即如图，Rt△ABC 中，∠C=90°，$CD\perp AB$，

则有：$AC\cdot BC=AB\cdot CD$．



6．射影定理

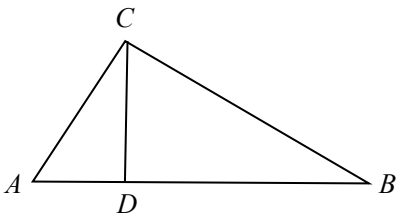
在直角三角形中，斜边上的高线是两直角边在斜边上的射影的比例中项，每条直角边是它们在斜边上的射影和斜边的比例中项

即如图，Rt△ABC 中，∠C=90°，$CD\perp AB$，

则有：$CD^2=AD\cdot BD$；

$AC^2=AD\cdot AB$；

$BC^2=BD\cdot AB$．



考点二．直角三角形的判定

1．有一个角是直角的三角形是直角三角形．

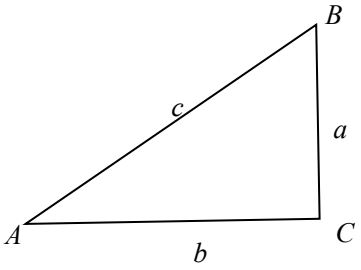
2．如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形．

3．勾股定理的逆定理：如果三角形的三边长a、b、c有关系$a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形．

考点三．锐角三角函数的概念及性质

1．概念

如图，在 Rt△ABC 中，∠C=90°．



（1）正弦：锐角 A 的对边与斜边的比称为∠A 的正弦，记为 sin$A$，即 $\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$；

（2）余弦：锐角 A 的邻边与斜边的比称为∠A 的余弦，记为 cos$A$，即 $\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$；

（3）正切：锐角 A 的对边与邻边的比称为∠A 的正切，记为 tan$A$，即 $\tan A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}=\dfrac{a}{b}$；

（4）余切：锐角 A 的邻边与对边的比称为∠A 的余切，记为 cot$A$，即 $\cot A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}}=\dfrac{b}{a}$．

2．特殊角的三角函数值

三角函数	0°	30°	45°	60°	90°
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tanα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
cotα	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

3．各锐角三角函数之间的关系

（1）互余关系

$\sin A=\cos(90°-A)$，$\cos A=\sin(90°-A)$

$\tan A=\cot(90°-A)$，$\cot A=\tan(90°-A)$

（2）平方关系

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$，$\sin^2 A+\sin^2(90°-A)=1$，$\cos^2 A+\cos^2(90°-A)=1$

（3）倒数关系

$\tan A\cdot\cot A=1$，$\tan A\cdot\tan(90°-A)=1$，$\cot A\cdot\cot(90°-A)=1$

（4）弦切关系

$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$，$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$

4．锐角三角函数的增减性：当角度在 0°~90°之间变化时，

（1）正弦值随着角度的增大（或减小）而增大（或减小）；

（2）余弦值随着角度的增大（或减小）而减小（或增大）；

（3）正切值随着角度的增大（或减小）而增大（或减小）；

（4）余切值随着角度的增大（或减小）而减小（或增大）.

04 四边形

考点一．凸四边形及多边形

1．四边形及多边形性质

（1）四边形的不稳定性：四边形的四边确定后，它的形状不能确定，这就是四边形所具有的不稳定性.

（2）四边形的内角和定理：四边形的内角和等于 360°.

四边形的外角和定理：四边形的外角和等于 360°.

（3）多边形的内角和定理：n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180°$.

多边形的外角和定理：任意多边形的外角和等于 360°.

（4）多边形的对角线条数的计算公式：设多边形的边数为 n，则多边形的对角线条数为 $\frac{n(n-3)}{2}$.

考点二．平行四边形

1．性质

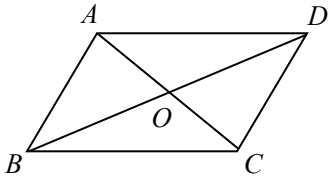
（1）角：对角相等，邻角互补．如图，$\angle ABC=\angle ADC$，$\angle BAD+\angle ABC=180°$.

（2）边：对边平行且相等．如图，$AB//CD$ 且 $AB=CD$.

（推论：夹在两条平行线间的平行线段相等）.

（3）对角线：对角线互相平分；如图，O 为 AC、BD 中点.

（4）平行四边形是中心对称图形，对角线交点即为对称中心.



2．平行四边形的判定

（1）定义：两组对边分别平行的四边形是平行四边形；

（2）定理 1：两组对角分别相等的四边形是平行四边形；

（3）定理 2：两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

（4）定理 3：对角线互相平分的四边形是平行四边形；

（5）定理 4：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形．

【提醒】命题“一组对边平行，一组对角相等的四边形是平行四边形”，正确；

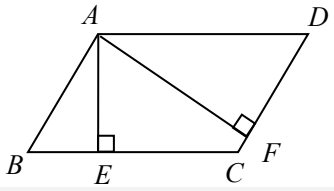
命题“一组对边平行，一组对边相等的四边形是平行四边形”，错误．

3．两条平行线的距离

两条平行线中，一条直线上的任意一点到另一条直线的距离，称这两条平行线的距离．

【提醒】平行线间的距离处处相等．

4．平行四边形的面积：$S_{平行四边形}$=底边长×高=$BC\times AE=CD\times AF$



【提醒】等面积结论：$BC\times AE=CD\times AF$，可用于求线段长．

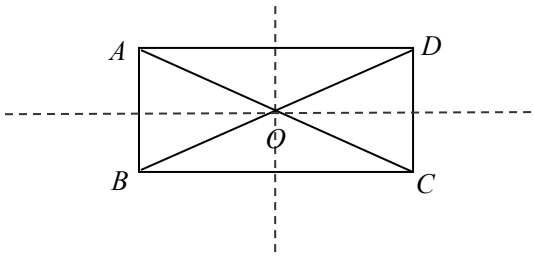
考点三．矩形

1．性质

（1）具有平行四边形的一切性质．

（2）角：四个角都是直角．

（3）对角线：对角线相等．如图，$AC=BD$．



（4）矩形既是中心对称图形也是轴对称图形，边的中垂线即为对称轴．如图，两条虚线所示直线．

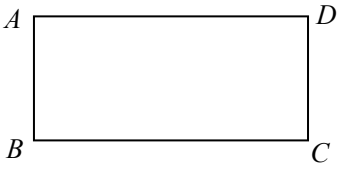
2．判定

（1）定义：有一个角是直角的平行四边形是矩形；

（2）定理 1：有三个角是直角的四边形是矩形；

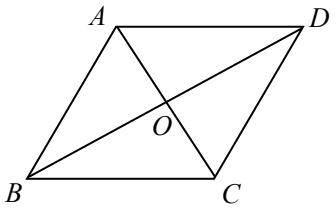
（3）定理 2：对角线相等的平行四边形是矩形；

（4）对角线互相平分且相等的四边形.



3．矩形的面积：$S_{矩形}$=长×宽=$AD \times AB$.

考点四．菱形



1．性质

（1）具有平行四边形的一切性质.

（2）菱形的四条边相等.

（3）菱形的对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角．如图，$AC \perp BD$，$\angle ABD = \angle CBD$.

（4）菱形既是中心对称图形也是轴对称图形，对角线所在直线即为对称轴.

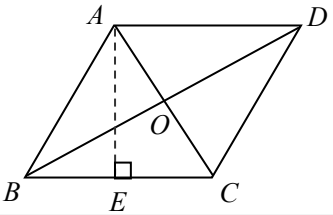
2．判定

（1）定义：有一组邻边相等的平行四边形是菱形；

（2）定理 1：四边都相等的四边形是菱形；

（3）定理 2：对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

（4）对角线互相平分且垂直的四边形.

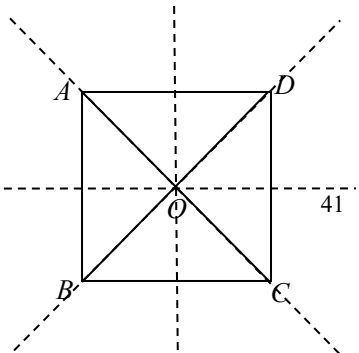


3．菱形的面积：$S_{菱形}$=底边长×高=两条对角线乘积的一半

即 $S_{菱形} = BC \times AE = \frac{1}{2} AC \times BD$.

【提醒】等面积结论：$BC \times AE = \frac{1}{2} AC \times BD$

考点五．正方形



1．性质

（1）具有平行四边形、矩形、菱形的一切性质.

（2）边：四条边都相等.

（3）角：四个角都是 90°.

（4）对角线：互相平分、垂直、相等，每一条对角线平分一组对角.

（5）正方形既是中心对称图形也是轴对称图形，有 4 条对称轴．如图．四条虚线所示直线.

2．判定

（1）一组邻边相等的矩形；

（2）对角线垂直的矩形；

（3）有一个内角等于 90°的菱形；

（4）对角线相等的菱形；

（5）对角线垂直且相等的平行四边形；

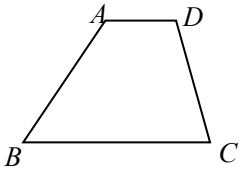
（6）对角线互相平分、垂直且相等的四边形.

3．正方形的面积：设正方形边长为a，对角线长为b，则 $S_{正方形}=a^2=\frac{b^2}{2}$.

考点六．梯形

1．概念

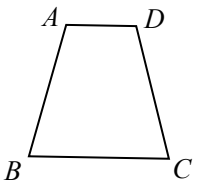
一组对边平行而另一组对边不平行的四边形称梯形.



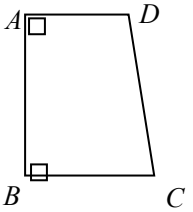
（1）梯形中平行的两边称梯形的底，通常把较短的底称上底，较长的底称下底.

（2）梯形中不平行的两边叫做梯形的腰.

（3）梯形的两底的距离称梯形的高.



（4）等腰梯形：两腰相等的梯形称等腰梯形．如图，$AB=CD$.

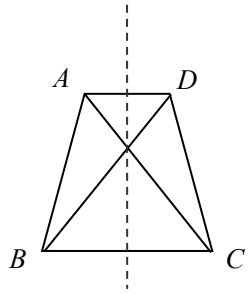


（5）直角梯形：一腰垂直于底的梯形称直角梯形．如图，$\angle A=\angle B=90°$.

2．判定

（1）定义：一组对边平行而另一组对边不平行的四边形是梯形；

（2）一组对边平行且不相等的四边形是梯形．



3．等腰梯形的性质

（1）等腰梯形的两腰相等，两底平行；

（2）等腰梯形的对角线相等；如图，$AC=BD$．

（3）等腰梯形是轴对称图形，它只有一条对称轴，即两底的垂直平分线．如图，虚线所示直线．

4．等腰梯形的判定

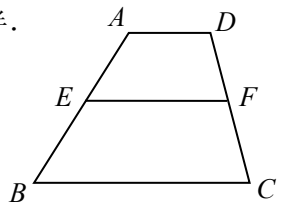
（1）定义：两腰相等的梯形是等腰梯形；

（2）定理：在同一底上的两个角相等的梯形是等腰梯形；

（3）对角线相等的梯形是等腰梯形．

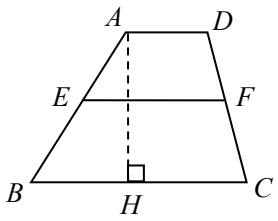
5．梯形中位线定理：梯形中位线平行于两底，并且等于两底和的一半．

如图，$EF // BC$ 且 $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$．



6．梯形的面积

（1）如图，$S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot AH=EF\cdot AH$．

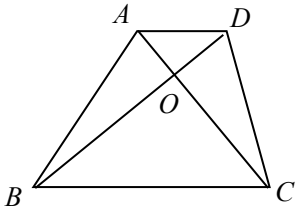


（2）梯形中有关图形的面积：

①$S_{\Delta BAD}=S_{\Delta CAD}$；

②$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta DBC}$；

③$S_{\Delta AOB}=S_{\Delta DOC}$；



④$\Delta OAD\backsim\Delta OCB$，$\frac{S_{OAD}}{S_{OCB}}=(\frac{AD}{BC})^2=(\frac{AO}{CO})^2=(\frac{DO}{BO})^2$；

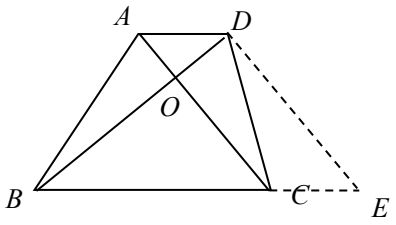
⑤ $\frac{S_{\Delta OAD}}{S_{\Delta AOB}}=\frac{S_{\Delta COD}}{S_{\Delta BOC}}=\frac{DO}{BO}$.

（3）如图，过 D 作对角线 AC 平行线交 BC 延长线于 E，则：

① 四边形 $ADED$ 为平行四边形，即 $AD=CE$；

② $S_{\Delta DCE}=S_{\Delta BAD}$；

③ $S_{梯形ABCD}=S_{\Delta DBE}$.

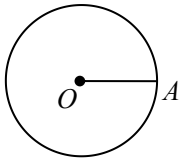


05 圆

考点一．圆的有关概念

1．圆定义

（1）定义一：在一个个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 随之旋转所形成的图形称圆，固定的端点 O 称为圆心，线段 OA 称为半径．



（2）定义二：圆可以看做是平面内到定点的距离等于定长的点的集合，定点为圆心，定长为圆的半径．

表示：以点 O 为圆心的圆记作“⊙O”，读作“圆 O”.

2．确定圆的条件

（1）圆心与半径．圆心确定圆的位置，半径确定圆的大小；

（2）直径及位置；

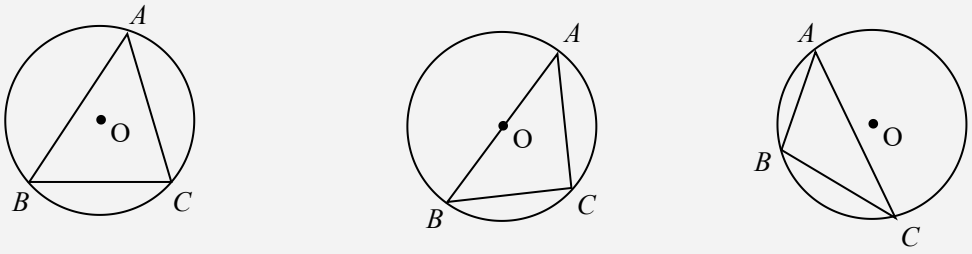
（3）不在同一条直线上的三点确定一个圆．

3．三角形的外接圆

（1）三角形的外接圆：经过三角形的三个顶点的圆，称三角形的外接圆．

（2）外心：外接圆的圆心是三角形三边垂直平分线的交点，称三角形的外心．

【提醒】锐角三角形的外心在内部，直角三角形的外心在斜边且为斜边中点，钝角三角形的外心在外部．如下图所示



4．三角形内切圆

（1）三角形内切圆：和三角形的三边都相切的圆，称三角形内切圆．

（2）内心：内切圆的圆心是三角形三条角平分线的交点，称三角形的内心．

【提醒】所有三角形的内心都在三角形内部．

5．弦

（1）概念：连结圆上任意两点的线段．

（2）直径：经过圆心的弦称直径．直径等于半径的两倍．

【提醒】直径是圆中最大的弦．

6．弦心距

圆心到弦的距离．

7．圆心角

顶点在圆心的角．

8．圆周角

顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角．

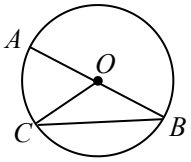
9．弧

概念：圆上任意两点间的部分称圆弧，简称弧．弧用符号“⌒”表示，以 A，B 为端点的弧记作“$\overset{\frown}{AB}$”，读作“圆弧 AB”或“弧 AB”．

（1）弧分为半圆，优弧．劣弧三种：

半圆：圆的任意一条直径的两个端点分圆成两条弧，每一条弧都称半圆．

劣弧：小于半圆的弧称做劣弧（多用两个字母表示）．如图，$\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{BC}$．



优弧：大于半圆的弧称做优弧（多用三个字母表示）．如图，$\overset{\frown}{CAB}$、$\overset{\frown}{ABC}$．

（2）弧的度量

弧的度量有两个方面：一是弧的长度；二是弧度，即弧所对圆心角的度数．

【提醒】等弧是指可以重合的两条弧，或说弧长及弧度都相等的两条弧．

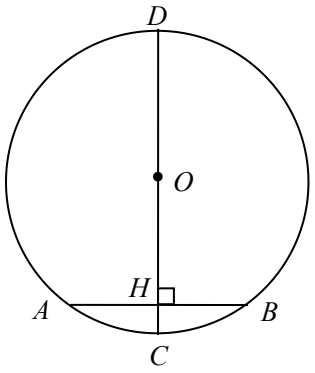
10．圆的对称性

（1）圆是轴对称图形，其对称轴是任意一条过圆心的直线；

（2）圆是中心对称图形，对称中心为圆心；

（3）圆具有旋转不变性，即一个圆绕它的圆心旋转任意一个角度，都能与原来的图形重合．

考点二．垂径定理



1．垂径定理及推论

（1）经过圆心；如图，*CD* 为直径．

（2）垂直于弦；如图，*CD*⊥*AB*．

（3）平分弦(不是直径)；如图，*AH*=*BH*．

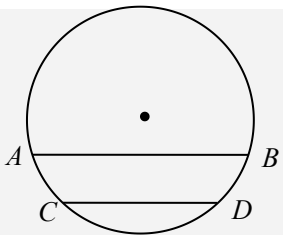
（4）平分弦所对的优弧；如图，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$．

（5）平分弦所对的劣弧．如图，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$．

以上五点“知二得三”．

【提醒】（推论）圆的两条平行弦所夹的弧相等．

如图，*AB*//*CD*，则 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$．



2．求弦心距，弦长，弓高，半径

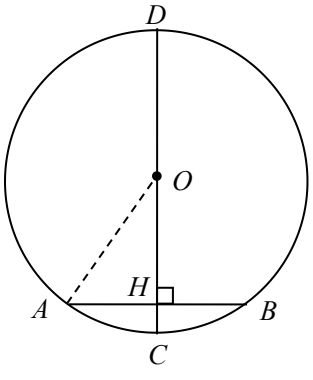
通常要做弦心距，并连接圆心和弦的一个端点，得到直角三角形．

如下图：在 RtΔAHO 中，$AO^2=AH^2+OH^2$．

【例题】已知⊙*O* 中，弦 *AB*=6，弓高 *CH*=1，求⊙*O* 半径．

解析：设半径为 r，

在 RtΔAHO 中，$AO^2=AH^2+OH^2$，

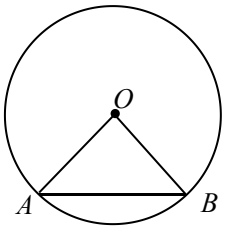


即 $r^2=3^2+(r-1)^2$，解得 $r=5$.

考点三．与圆相关的角的性质

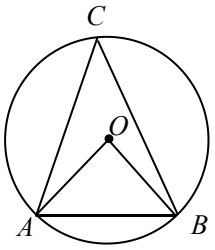
1．弧的度数

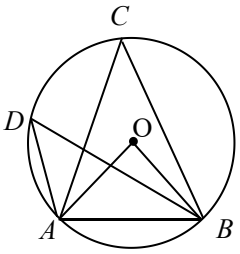
等于它所对圆心角的度数．如图，$\overset{\frown}{AB}$ 的度数等于 $\angle AOB$ 的度数．

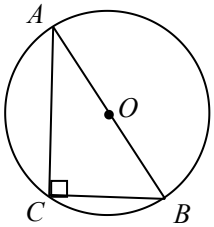


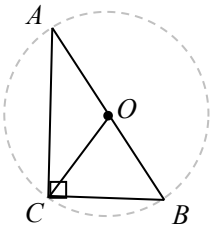
2．圆周角定理：一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半．

如图，$\angle C=\frac{1}{2}\angle AOB$.









（1）推论 1：同弧或等弧所对的圆周角相等；

如左上图，$\angle C=\angle D$.

（2）推论 2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径．

如中上图，AB 是直径 $\Leftrightarrow \angle C=90°$.

（3）推论 3：如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形．

如右上图，△ABC 中，O 为 AB 中点，则 $CO=\frac{1}{2}AB \Leftrightarrow \angle C=90°$.

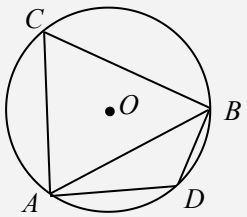
【提醒】（1）一条弧对应圆周角只有一种，而一条弦所对圆周角有两种，并且两种圆周角互补；

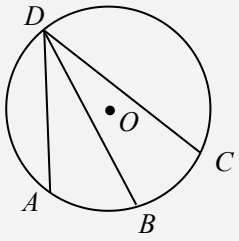
如左下图，弦 AB 对应两种圆周角，$\angle C$ 和 $\angle D$，$\angle C+\angle D=180°$.

（2）同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等；

如中下图，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC} \Leftrightarrow \angle ADB=\angle BDC$.

（3）倍弧对倍角． 如中下图，$\overset{\frown}{AC}=2\overset{\frown}{AB} \Leftrightarrow \angle ADC=2\angle ADB$.





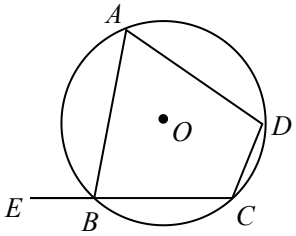
3．圆的内接四边形

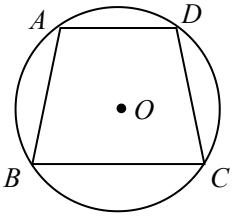
（1）圆内接四边形对角互补，外角等于内对角．

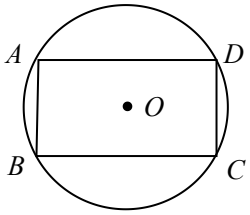
如左下图，$\angle A+\angle C=\angle ABC+\angle D=180°$，$\angle ABE=\angle D$．

（2）圆内接梯形为等腰梯形，圆内接平行四边形为矩形．如下图．

【提醒】若四边形对角互补，则四个顶点共圆．







考点四．圆心角、弧、弦、弦心距关系定理

1．定理及推论

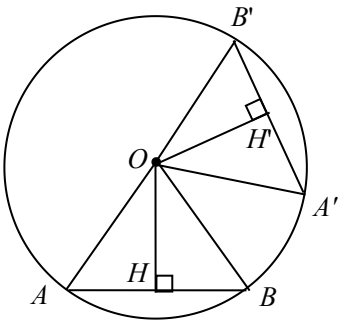
① 两个圆心角相等；如图，$\angle AOB=\angle A'OB'$．

② 两条弧相等；如图，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$．

③ 两条弦相等；$AB=A'B'$．

④ 两条弦心距相等．$OH=OH'$ ．

以上四点“知一得三”．



考点五．点、直线、圆与圆的位置关系

1．点和圆的位置关系

设圆的半径为r，点到圆心的距离为d，则点与圆的位置关系有三种

（1）点在圆外 $\Leftrightarrow d>r$；

（2）点在圆上 $\Leftrightarrow d=r$；

（3）点在圆内 $\Leftrightarrow d<r$.

2．直线和圆的位置关系

相交：直线和圆有两个公共点时，称直线和圆相交，这时直线称为圆的割线，公共点称为交点；

相切：直线和圆有唯一公共点时，称直线和圆相切，这时直线称为圆的切线；

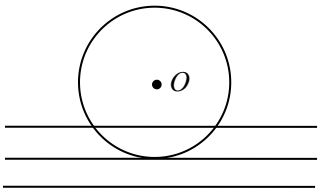
相离：直线和圆没有公共点时，称直线和圆相离.

设圆的半径为 r，圆心到直线的距离为 d，则直线与圆的位置关系

（1）相离 $\Leftrightarrow d>r$；

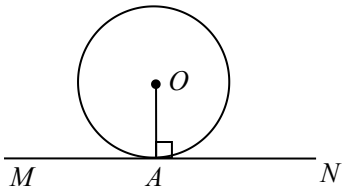
（2）相切 $\Leftrightarrow d=r$；

（3）相交 $\Leftrightarrow d<r$.



3．圆的切线

（1）概念：和圆有唯一一个公共点的直线称圆的切线，唯一公共点称切点.



（2）切线的判定

① 定理：经过半径的外端点且垂直于这条半径的直线是圆的切线；

如图，若直线经过半径 OA 的端点 A，且 $MN\perp OA$，则直线 MN 为⊙O 的切线.

② 圆心到直线距离等于半径，则直线为圆切线.

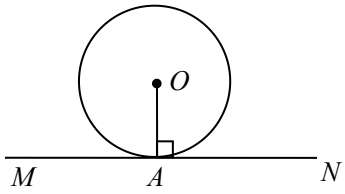
如右上图，若 $OA\perp MN$，$OA=r$，则直线 MN 为⊙O 的切线.

（3）切线的性质定理及推论

① 圆的切线垂直于经过切点的半径；

② 经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点；

③ 经过切点垂直于切线的直线必经过圆心.



4．圆与圆的位置关系

如果两个圆没有公共点，那么就说这两个圆相离，相离分为外离和内含两种；

如果两个圆只有一个公共点，那么就说这两个圆相切，相切分为外切和内切两种；

如果两个圆有两个公共点，那么就说这两个圆相交.

设两圆的半径分别为 R 和 r，圆心距为 d，那么

（1）两圆外离 $\Leftrightarrow d>R+r$；

（2）两圆外切 $\Leftrightarrow d=R+r$；

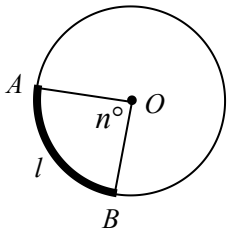
（3）两圆相交 $\Leftrightarrow R-r<d<R+r(R\geq r)$；

（4）两圆内切 $\Leftrightarrow d=R-r(R>r)$；

（5）两圆内含 $\Leftrightarrow 0\leq d<R-r(R>r)$．当 $d=0$ 时，两圆为同心圆．

考点六．弧长、面积计算

1．圆周长、弧长

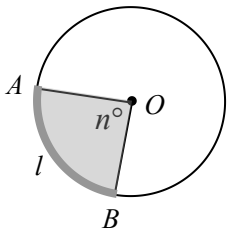


（1）圆周长：$c=2\pi R$．

（2）弧长：$l=\dfrac{n}{360}\times 2\pi R=\dfrac{n\pi R}{180}$．

备注：半径为 R 的圆中，$n°$ 的圆心角所对的弧长为 l．

2．圆、扇形、弓形面积



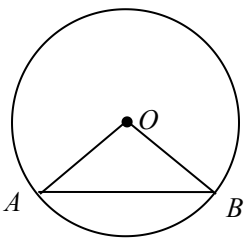
（1）圆面积：$S=\pi R^2$．

（2）扇形：由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧所围成的图形称为扇形．

（3）扇形面积：$S_{扇形}=\dfrac{n}{360}\pi R^2=\dfrac{1}{2}lR$．

3．弓形：弦与它所对应的弧所构成的封闭图形（一条弦对应两个弓形）．

弓高：弓形中弦的中点与弧的中点的连线段．



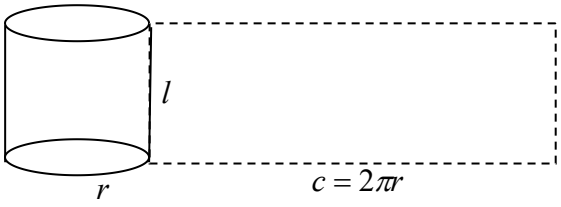
（1）当弓形的弧是劣弧时：$S_{弓形}=S_{扇形}-S_{三角形}$．

（2）当弓形的弧是优弧时：$S_{弓形}=S_{扇形}+S_{三角形}$．

（3）当弓形的弧是半圆时：$S_{弓形}=\dfrac{1}{2}S_{圆}$．

4．圆柱的侧面积、全面积

圆柱的侧面展开图是矩形，这个矩形的长等于圆柱的地面周长 c，宽是圆柱的母线长 l，如果圆柱的底面半径是 r，则

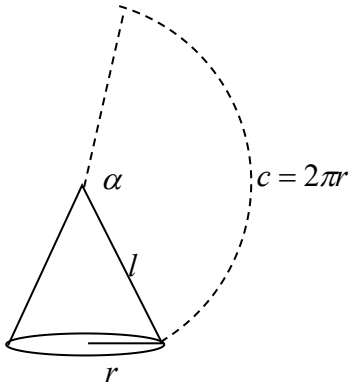


（1）圆柱侧面积：$S_{圆柱侧}=cl=2\pi rl$；

（2）圆柱全面积：$S_{圆柱全}=S_{圆柱侧}+2\pi r^2$.

5．圆锥的侧面积、全面积

圆锥的侧面展开图是扇形，这个扇形的弧长等于圆锥地面周长c，半径等于圆锥的母线l，若圆锥的地面半径为r，这个扇形的圆心角为α，则：



（1）$\dfrac{\alpha}{360°}=\dfrac{r}{l}\Rightarrow\alpha=\dfrac{r}{l}\cdot 360°$；

（2）$S_{圆锥侧}=\dfrac{1}{2}cl=\pi rl$；

（3）$S_{圆锥全}=S_{圆锥侧}+\pi r^2$.

考点七．切线长、弦切角、圆幂定理

6．切线长

（1）概念：经过圆外一点做圆的切线，这点和切点之间的线段的长，叫做这点到圆的切线长.

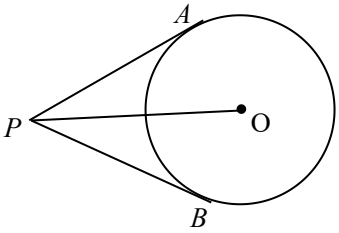
如左下图，*PA*、*PB* 为切线长.

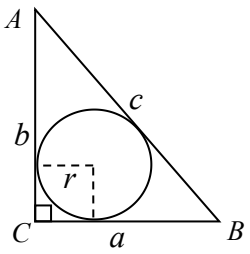
【提醒】切线长与切线的区别.

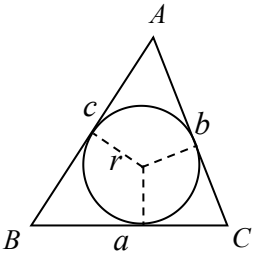
（2）切线长定理：从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，圆心和这一点的连线平分两条切线的夹角.

如左下图，*PA*=*PB*，∠*APO*=∠*BPO*.

（3）Rt△*ABC* 的内切圆半径：$r=\dfrac{a+b-c}{2}$；任意△*ABC* 的内切圆半径：$r=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$.

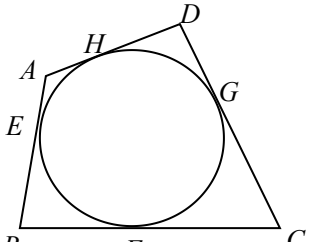


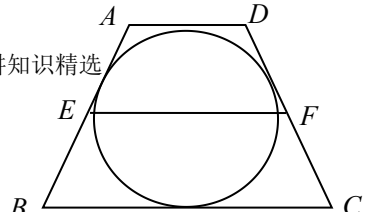




（4）圆的外切四边形对边和相等．如图，$AD+BC=AB+CD$.

（5）圆的外切梯形的中位线等于腰长．如图，*EF*=*AB*=*CD*.



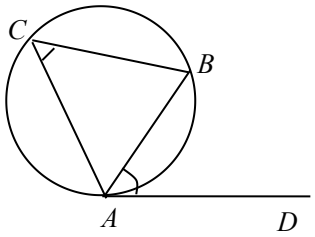


7．弦切角

（1）概念：顶点在圆上，一边和圆相交，另一边和圆相切的角叫做弦切角．如图，∠*BAD*．

（2）弦切角定理： 弦切角等于它所夹的弧对的圆周角．如图，∠*BAD*=∠*C*．

（3）弦切角定理的推论：如果两个弦切角所夹的弧相等，那么这两个弦切角也相等．



8．圆幂定理

（1）相交弦定理

圆内两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等．如左下图，$PA\cdot PB=PC\cdot PD$．

【提醒】（推论）如果弦与直径相交，那么弦的一半是它分直径所成的两条线段的比例中项．

（2）切割线定理

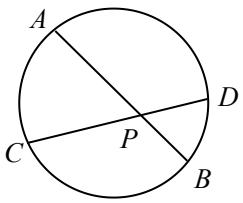
从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项．如中下图，

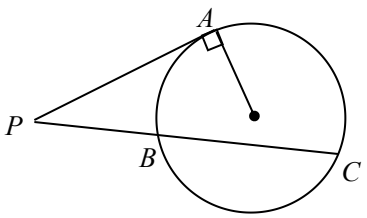
$PA^2=PB\cdot PC$．

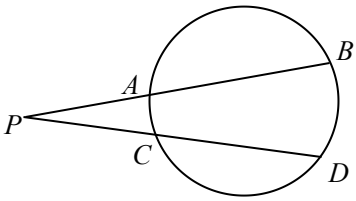
（3）割线定理

从圆外一点引圆的两条割线，这一点到每条割线与圆的交点的两条线段长的积相等．

如右下图，$PA\cdot PB=PC\cdot PD$．







06 视图与投影

考点一．视图

1．三视图画法

（1）确定主视图的位置，画出主视图；

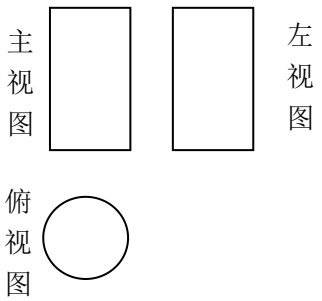
（2）在主视图的正下方画出俯视图，邦德提醒与主视图“长对正”；

（3）在主视图的正右方画出左视图，邦德提醒与主视图“高平齐”，与俯视图“宽相等”.

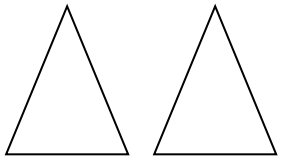
【提醒】看得见部分的轮廓线画成实线，因被其他部分遮挡而看不见部分的轮廓线画成虚线.

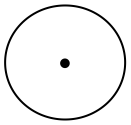
2．常见立体图形的三视图

（1）圆柱体：主视图、左视图都是矩形，俯视图是圆.

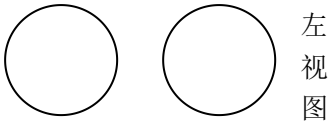


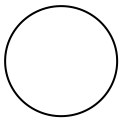
（2）圆锥体：主视图、左视图都是三角形，俯视图是圆加一点.

主视图  左视图

俯视图 

（3）球体：主视图、左视图、俯视图都是圆．

主视图  左视图

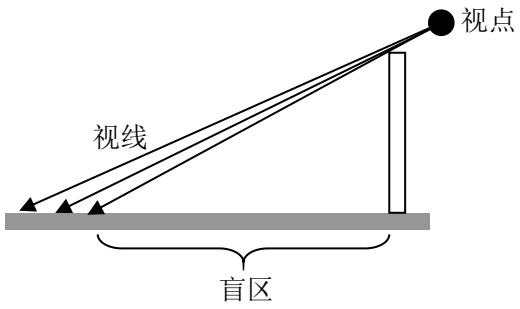
俯视图 

考点二．视点、视线、盲区

1．视点：眼睛的位置称为视点．

2．视线：由视点发出的线称为视线．

3．盲区：看不到的地方称为盲区．



五．统计与概率

01 统计初步

考点一．数据的收集

1．普查：为了一定的目的而对考察对象进行的全面调查．

2．抽样调查：从总体中抽取部分个体进行调查．

3．总体：所有考察对象的全体称总体．

4．个体：总体中每一个考察对象称个体．

5．样本：从总体中所抽取的一部分个体称总体的一个样本．

6．样本容量：样本中个体的数目称样本容量．

【提醒】样本容量没有单位．

【例题】深圳市有 50000 名初中毕业生参加毕业考试，为了考察他们的数学成绩情况，从中抽取了 1000 份试卷进行成绩分析．

在这一问题中，进行的是 抽样 调查，

总体是 深圳市 50000 名初中毕业生的数学成绩 ，

个体是 深圳市每个初中毕业生的数学成绩 ，

样本是 1000 名初中毕业生的数学成绩 ，样本容量是 1000 ．

考点二. 反映数据平均水平的平均数、众数、中位数

1．平均数：如果有 n 个数 x_1，x_2,…，x_n,那么，$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 叫做这 n 个数的平均数，$\bar{x}$ 读作“x 拔”.

2．加权平均数：如果 n 个数中，x_1 出现 f_1 次，x_2 出现 f_2 次，…，x_k 出现 f_k 次（这里 $f_1+f_2+\cdots f_k=n$），则 $\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots x_kf_k}{n}$，这样求得的平均数 $\bar{x}$ 叫做加权平均数，其中 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 叫做权.

【提醒】通常用样本平均数去估计总体平均数，样本容量越大，估计也就越精确.

3．众数：在一组数据中，出现次数最多的数称众数.

【提醒】众数是一个相对概念，即相对于其他数出现次数最多，一组数据中也可以有几个众数，也可以没有.

例如，数据 1，2，3，3，4，4 的众数是 3，4；数据 1，1，2，2，3，3 没有众数.

考点三. 反映数据波动水平的极差、方差、标准差

1．极差：一组数据中最大数据与最小数据的差.

2．方差：在一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,中，各数据与它们的平均数 $\bar{x}$ 的差的平方的平均数，称这组数据的方差．通常用“s^2”表示，即 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$.

3．标准差：**方差的算数平方根**叫做这组数据的标准差.

用“s”表示，即 $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}$.

【提醒】（1）方差和标准差都是来衡量一组数据的波动大小，方差（或标准差）越小，说明数据波动越小，即越稳定；

（2）一组数据都加上一个数时，方差不变；

（3）**一组数据都扩大 a 倍时，方差扩大 a^2 倍.**

考点四．频率分布

1．频数：每个对象出现的次数.

2．频率：每个对象出现的次数与总次数的比值.

3．研究频率分布的一般步骤：

（1）计算极差（最大值与最小值的差）

（2）决定组距与组数

（3）决定分点

（4）列频率分布表

（5）绘制频率分布直方图

【提醒】（1）频数、频率均能反映每个对象出现的频繁程度；

（2）频率分布反映的是一个样本数据在各个小范围内所占比例的大小.

02 概率初步

考点一．确定事件和随机事件概念

1．确定事件

（1）必然事件：在一定的条件下重复进行试验时，在每次试验中必然会发生的事件；

（2）不可能发生的事件：有的事件在每次试验中都不会发生，这样的事件称不可能的事件．

2．随机事件：在一定条件下，可能发生也可能不放声的事件，称随机事件．

考点二．概率的定义及求法

1．概率

定义一：一般地，在大量重复试验中，如果事件 A 发生的频率 $\frac{n}{m}$ 会稳定在某个常数 p 附近，那么这个常数 p 就叫做事件 A 的概率，记作 $P(A)=p$．

定义二：表示一个事件发生的可能性大小的这个数称该事件的概率，事件 A 的概率记作 $P(A)$，概率的计算公式为 $P(A)=\dfrac{\text{事件}A\text{发生的可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$．

【提醒】（1）频率是概率的估计值；

（2）当 A 是必然事件时，$P(A)=1$；

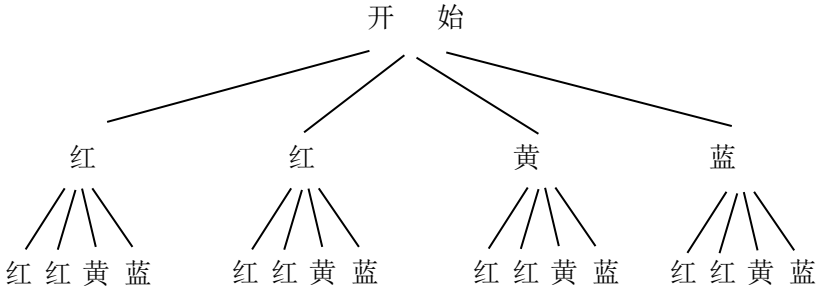
（3）当 A 是不可能发生的事件时，$P(A)=0$．

2．列表法：用列出表格的方法来分析和求解某些事件的概率的方法称列表法．

3．树状图法：就是通过列树状图列出某事件的所有可能的结果，求出其概率的方法称树状图法．

【例题】在一个不透明的纸箱里装有红、黄、蓝三种颜色的小球，它们除颜色外完全相同，其中红球有 2 个，黄球有 1 个，蓝球有 1 个．现有一张电影票，小明和小亮决定通过摸球游戏定输赢（赢的一方得电影票）．游戏规则是：两人各摸 1 次球，先由小明从纸箱里随机摸出 1 个球，记录颜色后放回，将小球摇匀，再由小亮随机摸出 1 个球．若两人摸到的球颜色相同，则小明赢，否则小亮赢．这个游戏规则对双方公平吗？请你利用树状图或列表法说明理由．

解：



或

第2次 / 第1次	红	红	黄	蓝
红	（红，红）	（红，红）	（红，黄）	（红，蓝）
红	（红，红）	（红，红）	（红，黄）	（红，蓝）
黄	（黄，红）	（黄，红）	（黄，黄）	（黄，蓝）
蓝	（蓝，红）	（蓝，红）	（蓝，黄）	（蓝，蓝）

由上述树状图或表格知：所有可能出现的结果共有 16 种．

P（小明赢）$=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$，$P$（小亮赢）$=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$．

∴此游戏对双方不公平，小亮赢的可能性大．

【提醒】（1）当一次试验要设计两个因素， 并且可能出现的结果数目较多时，通常采用列表法；

（2）当一次试验要设计三个或更多的因素时，用列表法就不方便了，通常采用树状图法．



欢迎关注快乐学习