2022 年深圳中学自主招生数学试题（回忆版）
参考答案

一、数学填空题（第 1 – 10 题，每题 4 分，共 40 分）

1. 当 $x=14$ 时，$\sqrt{x-2+\sqrt{x-2+\sqrt{x-2+\sqrt{x+2}}}}=$ __4__.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$ 均为锐角，$\sin A=\frac{5}{13}$，$\tan B=2$，$AB=29$，则 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=$ _145__.

【提示】设 AB 边上的高 CD 长为 $10x$，则 $AD=24x$，$BD=5x$，

故 $AB=29x=29$，解得 $x=1$，故 $S_{\triangle ABC}=29\times\frac{10}{2}=145$.

3. 已知 $\frac{a}{b}=a+2$，$\frac{b}{a}=a-2$. 则 $\frac{b^2}{(a-2)^2}=$ __5__.

【提示】将两式相乘得，$a^2-4=1$，即 $a^2=5$. 再由第二个式子，所求的值即为 a^2.

4. 定义：(i) $x\otimes y=(x-1)\otimes(y-1)+x+y$；

(ii) $x\otimes 1=1$.

则 $(20\otimes 2)\otimes 2=$ __26__.

【提示】根据所给的两个递推关系式，有 $20\otimes 2=19\otimes 1+20+2=1+22=23$，

进而，$23\otimes 2=22\otimes 1+23+2=1+25=26$.

5. 已知 x,y 为非零实数，且满足 $\begin{cases}x=y+\frac{1012}{x}\\ y=x+\frac{1013}{y}\end{cases}$，则 $|x-y|$ 所有值之和为 _45_.

【提示】将两式相加得，$\frac{1012}{x}+\frac{1013}{y}=0$，故设 $\frac{1012}{x}=-\frac{1013}{y}=k$，

则 $x=\frac{1012}{k}$，$y=-\frac{1013}{k}$. 代回原方程组得 $\frac{1012}{k}=-\frac{1013}{k}+k$，

解得 $k^2=2025$. 故 $|x-y|=\left|\frac{1012}{k}+\frac{1013}{k}\right|=\frac{2025}{|k|}=45$.

6. 已知 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$，则 $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+100=$ __97__.

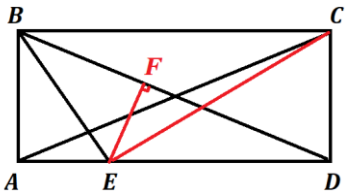
【提示】由 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$ 展开得，$ab+bc+ca=0$，再除以 abc 得，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. 另一方面，$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{a+b+c}{a}+\frac{b+c+a}{b}+\frac{a+b+c}{c}-3=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3=-3$.

7. 直线 $y=\frac{1}{17}x+a$ 与 $x=\frac{1}{17}y+b$ 交于点 $(42,43)$，则 $a+b=$ __80__.

【提示】将两直线的方程式相加得，$x+y=\frac{1}{17}(x+y)+(a+b)$.

故 $a+b=\frac{16}{17}(x+y)=\frac{16}{17}(42+43)=80$.

8. 如图，矩形 $ABCD$ 中，$AD=156$，$CD=65$，BE 平分 $\angle ABC$，设 E 到 AC 的距离为 $\frac{m}{n}$，其中 m 和 n 是互质的正整数，则 $m+n=$ __53__.



【提示】面积法。首先由勾股定理求出 $AC=BD=13\times13$.

作 $EF\perp BD$，并设 $AE=EF=x$，由 $DF=BD-BF=BD-AB=13\times8$，

然后在直角 $\triangle DEF$ 中运用勾股定理得，$x^2+(13\times8)^2=(13\times12-x)^2$，

解得（这也可直接由角平分线定理得出），$x=13\times\frac{10}{3}$.

再由面积关系，$2S_{\triangle AEC}=AE\cdot CD=AC\cdot h$，得 $h=\frac{AE\cdot CD}{AC}=\frac{10\times5}{3}=\frac{50}{3}$.

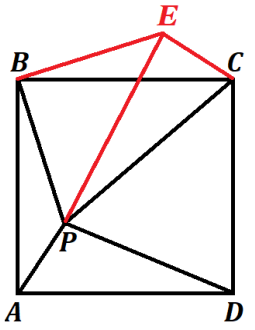
9. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，$PA=1,PB=2,PC=3$，则 $\angle APB$ 的度数为 __135__.

【提示】将 $\triangle BAP$ 绕 B 点逆时针旋转 90^0 得 $\triangle BCE$，

易知 $\triangle BEP$ 是等腰直角三角形，进而得 $EP=2\sqrt{2}$，

再由 $EC=1$ 及 $PC=3$ 可知 $\angle PEC=90^0$，

故 $\angle APB=\angle CEB=135^0$.



10. （暂缺）

二、数学填空题（第 11－15 题，每题 6 分，共 30 分）

11. 若 $x-0.5$ 不是整数，令 $[x]$ 为最接近 x 的整数，如 $[2.4]=2$，$[2.6]=3$. 则 $[\sqrt{1\times2}]+[\sqrt{2\times3}]+[\sqrt{3\times4}]+\cdots+[\sqrt{22\times23}]=$ __253__.

【提示】考虑通项式：$\sqrt{n(n+1)}=\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}<n+\frac{1}{2}$，故有 $\left[\sqrt{n(n+1)}\right]=n$.

于是原式等于 $1+2+\cdots+22=253$.

12. 定义：$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}$，则 $f(1)+f(3)+\cdots+f(2k-1)+f(999)=$ __5__.

【提示】由公式：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$，并设 $a=\sqrt[3]{x+1}$，$b=\sqrt[3]{x-1}$，

则有 $f(x)=\frac{1}{a^2+ab+b^2}=\frac{a-b}{a^3-b^3}=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{(x+1)-(x-1)}=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)$.

于是，由裂项法，所求代数式等于

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{0}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+\cdots+\sqrt[3]{1000}-\sqrt[3]{998}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{1000}-\sqrt[3]{0}\right)=5.$$

13. 设 n 为正整数，n^2+n+51 是完全平方数，则所有 n 可能值之和等于 __55__.

【提示】设 $k^2=n^2+n+51$，

为凑成 n 的完全平方数，$4k^2=4n^2+4n+204=(2n+1)^2+203$，

可运用平方差公式，得 $(2k+2n+1)(2k-2n-1)=203\times1=29\times7$，

于是得到两组方程组：$\begin{cases}2k+2n+1=203\\2k-2n-1=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2k+2n+1=29\\2k-2n-1=7\end{cases}$.

两方程相减，解得，$n=50$ 或 $n=5$.

14. 若整数 x、y、z 满足 $x\le y\le z\le7$，且 $x+y+z=8$，$xy+yz+zx=-13$，则 $|xyz|=$ __140__.

【提示】首先判断各整数的正负性，然后确定其中某个整数的取值范围，以简化列举。

由于 $x+y+z=8$，可得 $0<z\le7$. 故有 $x+y\ge1>0$.

再由 $xy+yz+zx=xy+(x+y)z=-13$，可得 $xy<-13<0$，即 x、y 异号.

又因 $x\le y$，故得 $x<0<y$. 为保证正整数，令 $t=-x>0$.

将 y、z 视作二次方程的两个根，采用韦达定理的视角，则原两式变换为

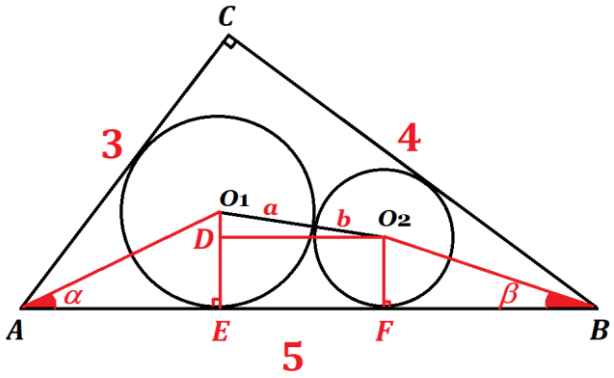
$p\equiv y+z=8+t\le14$；　　$q\equiv yz=-13+t(y+z)=t^2+8t-13>0$.

由上述第二个不等式得，$t>-4+\sqrt{29}\ge2$，再联合第一个不等式得，$2\le t\le6$.

$t=$:	2;	3;	4;	5;	6
$p=y+z=$:	10;	11;	12;	13;	14
$q=yz=$:	7;	20;	35;	52;	71

由十字叉乘法，只有当 $t=4$ 时才有正整数解：$yz=35$. 故，$|xyz|=t\cdot yz=140$.

15. 如图，在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90^0$，$AC = 3$，$BC = 4$. 圆 O_1 与边 AC 和 AB 相切，圆 O_2 与边 BC 和 AB 相切，圆 O_1 与圆 O_2 相外切，设圆心距 O_1O_2 的最小值为 m，则 $5m - m^2 =$ __5__.



【提示】注意两组二倍角公式：$\tan\alpha = \frac{1}{2}$，$\tan 2\alpha = \frac{4}{3}$；$\tan\beta = \frac{1}{3}$，$\tan 2\beta = \frac{3}{4}$.

设圆 O_1 和圆 O_2 的半径分别为 a 和 b，因此，在图中，得到

$$AE = 2a, BF = 3b, EF = DO_2 = \sqrt{{O_1O_2}^2 - {O_1D}^2} = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 2\sqrt{ab}.$$

故有，$AB = AE + EF + BF = 2a + 3b + 2\sqrt{ab} = 5$.

令所求的圆心距 $d = a + b$，故由上式，得 $2d + b + 2\sqrt{(d-b)\,b} = 5$.

对上式移项后再平方得 $4d^2 + b^2 + 25 + 4db - 20d - 10b = 4db - 4b^2$.

消去交叉项后，将两元分别配方，得 $(2d-5)^2 + 5(b-1)^2 = 5$.

故当 $2d < 5$ 时，要使 d 取最小值，$(2d-5)^2$ 应取最大值，$(b-1)^2$ 取最小值 0.

因此，当 $b = 1$ 时，d 的最小值 m 满足：$(2m-5)^2 = 5$.

展开上式，即得，$5m - m^2 = 5$.