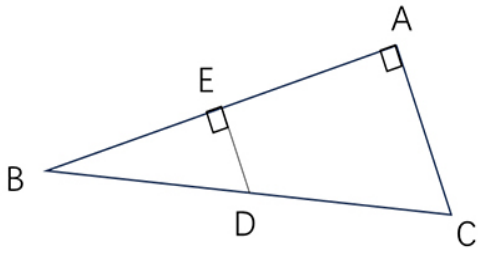
2023 年深圳中学自主招生数学试卷

1.（4 分）$\dfrac{100\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(2+\sqrt{6}+\sqrt{10})}=$____.

2.（4 分）$f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+\ldots+(x-21)^2$ 的最小值为 ____.

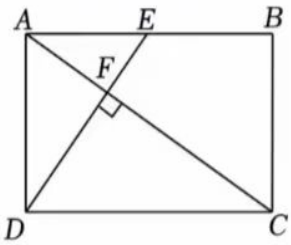
3. 已知直角三角形 ABC 中，BE=AC，角 B 为 30 度。求当 AB+DE=480 时，ED 的长度；(4 分)



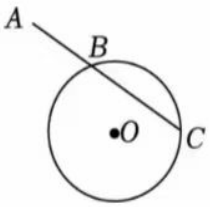
（题 3 图）

4.（4 分）已知 x，y 为正整数，$x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-\sqrt{7}x-\sqrt{7}y+\sqrt{7xy}=7$，求 $x+y=$____.

5.（4 分）如图，在矩形 $ABCD$ 中，E 为 AB 中点且 $DE\perp AC$，求 $(\dfrac{AB}{BC})^2+100=$____.

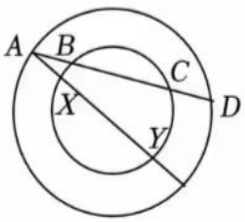


6.（4 分）如图，在半径为 10 的圆中，距圆心 O 点为 20 的 A 点做割线，交圆于 BC 两点，O 点到 BC 距离为 6，设 AB 为 x，则 $(x+8)^2=$____.

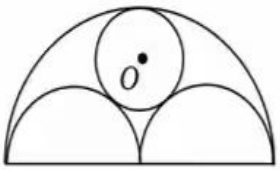


7.（4 分）已知 $xy+x+y=44$，$x^2y+xy^2=484$，则 $x^2+y^2=$____.

8.（4 分）如图，两个同心圆，已知 $AB=2$，$BC=10$，$AX=3$，求 $XY=$____.



9.（4 分）如图，由三个半圆和一个整圆构成，已知大半圆半径 60，小半圆半径为 30，则圆 O 的直径 ____.



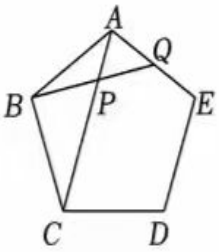
10．（4 分）若抛物线 $y=x^2+(2a+1)x+2a+\frac{5}{4}$ 的图象与 x 轴仅一个交点，则 $a^4-a^3-a+100$ 的值为 ____.

11.（6 分）若方程 $|x-10|+|x-40|-|x-20|=a$ 恰有三个解，则所有符合条件的 a 之和为 ____.

12.（6 分）对于任意一个非负整数 N，都定义有 $N*$ 且 $\frac{(N+1)*+(N-1)*}{2}=N*+1$，若 $0*=0$，$100*=20000$，记 $P=200*$，则 $\frac{P}{100}=$____.

13．（6 分）已知正数 a，b，c 满足 $\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{23}{99}$，若 $S=99(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a})$，则 $S=$____.

14.（6 分）如图，已知正五边形 $ABCDE$ 中，点 P 为线段 AC 上一点，且满足 $\frac{AP}{CP}=\frac{2}{\sqrt{5}+3}$，直线 BP 交 AE 于点 Q，设 $\frac{AQ}{EQ}=t$，则 $60t^2+7=$____.



15.（6 分）若三角形的三边长均为正整数，且其面积与其周长的数值相等，则满足条件的三角形面积之和为 ____.

参考答案

1.

解：$\dfrac{100\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(2+\sqrt{6}+\sqrt{10})}$

$=\dfrac{100\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}$

$=\dfrac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}[(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2]}$

$=\dfrac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times 2\sqrt{6}}$

$=\dfrac{100}{\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}$

$=25$；

2. 解：$f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+\cdots+(x-21)^2$

$=(x^2-2\cdot x+1)+(x^2-2\cdot 2x+2^2)+\cdots+(x^2-2\cdot 21x+21^2)$

$=21x^2-2(1+2+\cdots+21)x+(1^2+2^2+\cdots+21^2)$

$=21x^2-2\cdot\dfrac{21\times(1+21)}{2}\cdot x+\dfrac{21\times(21+1)\times(2\times 21+1)}{6}$

$=21x^2-462x+3311$

$=21(x-11)^2+770$，

$\because 21>0$，

$\therefore$ 当$x=11$时，有最小值$f(11)=770$，

4. 解：$\because x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-\sqrt{7x}-\sqrt{7y}+\sqrt{7xy}=7$，

$\therefore x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-\sqrt{7x}-\sqrt{7y}+\sqrt{7xy}-7=0$，

$\therefore \sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{7}(\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{7}(\sqrt{xy}-\sqrt{7})=0$，

$\therefore (\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{xy}-\sqrt{7})+\sqrt{7}(\sqrt{xy}-\sqrt{7})=0$，

$\therefore (\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{7})(\sqrt{xy}-\sqrt{7})=0$，

$\because \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{7}>0$，

$\therefore \sqrt{xy}-\sqrt{7}=0$，

$\therefore xy=7$，

又x，y为正整数，则$(x,\ y)=(1,\ 7)$或$(7,1)$，

从而$x+y=8$，

5. 解：$\because$四边形$ABCD$为矩形，

$\therefore AB//CD$，$AB=CD$，$AD=BC$，$\angle ADC=\angle DAE=90°$，

$\because E$为AB中点，

$\therefore \dfrac{EF}{FD}=\dfrac{AE}{DC}=\dfrac{1}{2}$，

$\because DE\perp AC$，

$\therefore \angle AFE=\angle DFA=90°$，

$\because \angle AEF=\angle DEA$，$\angle DAF=\angle CAD$，

$\therefore \Delta AEF\backsim\Delta DAE$，$\Delta ADF\backsim\Delta ACD$，

$\therefore \dfrac{AE}{EF}=\dfrac{ED}{AE}$，$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AF}{AD}$，

$\therefore AE^2=EF\cdot ED$，$AD^2=AF\cdot AC$，

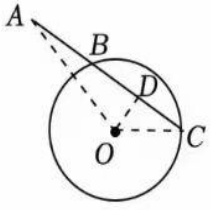
$\therefore \dfrac{AE^2}{AD^2}=\dfrac{EF\cdot ED}{FD\cdot ED}=\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{1}{2}$，

又$AB^2=4AE^2$，$BC^2=AD^2$，

$\therefore (\dfrac{AB}{BC})^2=2$，

$\therefore (\dfrac{AB}{BC})^2+100=2+100=102$；

6. 解：连接OA，OC，过点O作$OD\perp BC$于D，如图所示：



依题意得：$OA=20$，$OC=10$，$OD=6$，

在$\mathrm{Rt}\Delta OCD$中，$OC=10$，$OD=6$，

由勾股定理得：$CD\sqrt{OC^2-OD^2}=8$，

$\because OD\perp BC$，

$\therefore BD=CD=8$，

在$\mathrm{Rt}\Delta AOD$中，$OA=20$，$OD=6$，

由勾股定理得：$AD^2=OA^2-OD^2=364$，

$\because AB$为x，$BD=8$，

$\therefore x+8=AB+BD=AD$，

$\therefore (x+8)^2=364$.

7. 解：设$m=xy$，$n=x+y$，

因为$xy+x+y=44$，$x^2y+xy^2=484$，

所以$\begin{cases}m+n=44\\mn=484\end{cases}$，

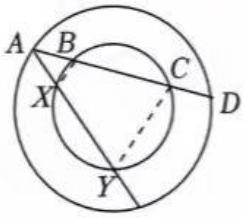
解得$\begin{cases}m=22\\n=22\end{cases}$，

即$xy=22$，$x+y=22$，

把$xy=22$，$x+y=22$代入$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$，得

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=484-44=440$.

8. 解：连接BX，CY，如图所示：



$\because$四边形$BCYX$内接于小圆，

$\therefore \angle ABX=\angle AYC$，

又$\angle A=\angle A$，

$\therefore \Delta ABX\backsim\Delta AYC$，

$\therefore AB:AY=AX:AC$，

$\because AB=2$，$BC=10$，$AX=3$，

$\therefore AC = AB + BC = 12$， $AY = AX + XY = 3 + XY$，

$\therefore 2:(3+XY) = 3:12$，

$\therefore XY = 5$.

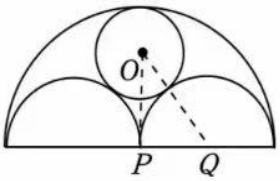
9．解：如图，设圆O的半径为r，则$OP = 60 - r$， $OQ = 30 + r$，

由题意可知， $OP \perp PQ$，则$OP^2 + PQ^2 = OQ^2$，

$\therefore (60-r)^2 + 30^2 = (30+r)^2$，

解得$r = 20$，

$\therefore$圆O的直径为40.



10．解：$\because$抛物线$y = x^2 + (2a+1)x + 2a + \frac{5}{4}$的图象与$x$轴仅一个交点，

$\therefore x^2 + (2a+1)x + 2a + \frac{5}{4} = 0$，

$\therefore \triangle = (2a+1)^2 - 4\times1\times(2a+\frac{5}{4}) = 4(a^2 - a - 1) = 0$，

解得： $a^2 - a = 1$，

$\therefore a^4 - a^3 - a + 100 = a^2(a^2 - a) - a + 100 = a^2 - a + 100 = 1 + 100 = 101$，

故答案为：101.

11．解：令$f(x) = |x-10| - |x-40| + |x-20|$

①当$x \geqslant 40$时， $f(x) = x - 10 + x - 40 - x + 20 = x - 30$；

②当$20 \leqslant x < 40$时， $f(x) = x - 10 - x + 40 - x + 20 = -x + 50$；

③当$10 \leqslant x < 20$时， $f(x) = x - 10 - x + 40 + x - 20 = x + 10$；

④当$x < 10$时， $f(x) = -x + 10 - x + 40 + x - 20 = -x + 30$.

综上 $f(x) = \begin{cases} x - 30 & (x \geqslant 40) \\ -x + 50 & (20 \leqslant x < 40) \\ x + 10 & (10 \leqslant x < 20) \\ -x + 30 & (x < 10) \end{cases}$

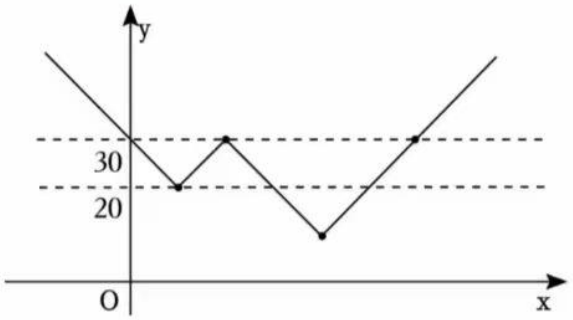
由此可画出 $f(x)$ 的图象如图所示，

而 $a=f(x)$ 有 3 个解，

$\therefore y=a$ 与 $f(x)$ 有三个交点，

由图象可知 $a=30$ 或 $a=20$，

$\therefore a$ 的值的和为 50.



12. 解：$\because \dfrac{(N+1)^*+(N-1)^*}{2}=N^*+1$，

$\therefore (N+1)^*+(N-1)^*=2N^*+2$.

当 $N=1$ 时，$2^*+0^*=2\cdot 1^*+2$，即 $2^*=2\cdot 1^*+2=2\cdot 1^*+1\times 2$；

当 $N=2$ 时，$3^*+1^*=2\cdot 2^*+2=2(2\cdot 1^*+2)+2$.

$\therefore 3^*=2(2\cdot 1^*+2)+2-1^*=3\cdot 1^*+6=3\cdot 1^*+2\times 3$；

当 $N=3$ 时，$4^*+2^*=2\cdot 3^*+2=2(3\cdot 1^*+6)+2$.

$\therefore 4^*=2(3\cdot 1^*+6)+2-2^*=2(3\cdot 1^*+6)+2-2^*=2(3\cdot 1^*+6)+2-(2\cdot 1^*+2)=4\cdot 1^*+3\times 4$.

……

由此，可猜想 $N^*=N\cdot 1^*+N(N-1)$.

$\because 100^*=20000$，

$\therefore 20000=100\cdot 1^*+100\times 99$.

$\therefore 1^*=101$.

$\therefore P=200^*=200\cdot 1^*+199\times 200=200\times 101+199\times 200=60000$.

$\therefore \dfrac{P}{100}=\dfrac{60000}{100}=600$.

13. 解：令 $\dfrac{a-b}{a+b}=x$，$\dfrac{b-c}{b+c}=y$，$\dfrac{c-a}{c+a}=z$，则 $xyz=-\dfrac{23}{99}$，

$\therefore (a-b)=x(a+b)$，$b-c=x(b+c)$，$c-a=x(c+a)$，

$\therefore a-ax=bx+b$，$b-bx=cx+c$，$c-cx=ax+a$，

$\therefore a(1-x)=b(1+x)$，$b(1-x)=c(1+x)$，$c(1-x)=a(1+x)$，

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{1+x}{1-x},\frac{b}{c}=\frac{1+y}{1-y},\frac{c}{a}=\frac{1+z}{1-z}$，$\frac{b}{c}=\frac{1+y}{1-y}$，$\frac{c}{a}=\frac{1+z}{1-z}$，

$\therefore \frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}\cdot\frac{1+z}{1-z}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1$，

$\therefore (1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$

整理，得$x+y+z=-xyz$，

$\therefore x+y+z=\frac{23}{99}$，

由$\frac{a-b}{a+b}=x$可知，$\frac{b-a}{a+b}=-x$，

$\therefore \frac{b-a}{a+b}=-x$，

$\therefore \frac{a+b-2a}{a+b}=-x$，从而$1-\frac{2a}{a+b}=-x$，

$\therefore \frac{a}{a+b}=\frac{1+x}{2}$，

同理，可得$\frac{b}{b+c}=\frac{1+y}{2}$，$\frac{b}{b+c}=\frac{1+y}{2},\frac{c}{c+a}=\frac{1+z}{2}$，

$\therefore S=99(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a})=99(\frac{1+x}{2}+\frac{1+y}{2}+\frac{1+z}{2})=\frac{99}{2}(x+y+z+3)=160$.

14．解：如图，作$BF//AE$交AC于点F，

$\because ABCDE$为正五边形，

$\therefore \angle BAC=\angle ACB=36°$，$\angle BFA=\angle FAQ=72°$，

$\therefore \angle ABF=\angle AFB$，

$\therefore AB=AF$，

$\because BF//AE$，

$\therefore \angle CBF=36°$，$BF=CF$，

设$AB=AF=1$，$BF=CF=x$，

$\because \angle BCF=\angle ACB$，$\angle CBF=\angle CAB$，

$\therefore \Delta BFC\backsim\Delta ABC$，

$\therefore \frac{BF}{BC}=\frac{AB}{AC}$

$\therefore BF \cdot AC = AB \cdot BC$，

$\therefore x \cdot (x+1) = 1$，

解得：$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $x = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$（舍去），

$\therefore BF = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

$\therefore AC = AF + CF = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，

又 $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+3}$，

$\therefore \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+5}$，

$\therefore AP = \dfrac{2}{\sqrt{5}+5} \cdot AC = \dfrac{2}{\sqrt{5}+5} \cdot \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore PF = AF - AP = 1 - \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{5}$，

$\because BF // AE$，

$\therefore \Delta AQP \backsim \Delta BFP$，

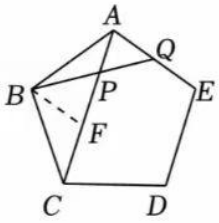
$\therefore \dfrac{AQ}{BF} = \dfrac{AP}{PF}$，

$\therefore AQ = \dfrac{AP \cdot BF}{PF} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}-1}{5}}{\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{1}{2}$，

$\therefore QE = AE - AQ = \dfrac{1}{2}$，

$\therefore t = \dfrac{AQ}{QE} = 1$，

$\therefore 60t^2 + 7 = 60 \times 1 + 7 = 67$．



15. 解：设三角形的三边长分别为 a，b，c，面积为 S，半周长为 $p = \dfrac{a+b+c}{2}$，

由海伦公式 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$．再由 $p = \dfrac{a+b+c}{2}$，可得：

周长与面积相等的三角形应当满足 $2p=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，即

$4p^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$．（1）

$\because p=\dfrac{a+b+c}{2}$，

$\therefore p-a=\dfrac{a+b+c}{2}-a=\dfrac{b+c-a}{2}$，

同理 $p-b=\dfrac{a+c-b}{2}$，$p-c=\dfrac{a+b-c}{2}$，

$\therefore (p-a)+(p-b)+(p-c)=p$，

$\therefore 4[(p-a)+(p-b)+(p-c)]=(p-a)(p-b)(p-c)$，

即 $\dfrac{1}{(p-b)(p-c)}+\dfrac{1}{(p-c)(p-a)}+\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}=\dfrac{1}{4}$（2），

设 $a\bullet b\bullet c$，则有 $\dfrac{1}{(p-b)(p-c)}$开$\dfrac{1}{(p-c)(p-a)}$开$\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$，

$\therefore \dfrac{3}{(p-b)(p-c)}$开$\dfrac{1}{(p-b)(p-c)}+\dfrac{1}{(p-c)(p-a)}+\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}=\dfrac{1}{4}$，

即 $(p-b)(p-c)\bullet 12$．

又由（2）式有 $\dfrac{1}{(p-b)(p-c)}<\dfrac{1}{4}$，即 $(p-b)(p-c)>4$．

因此，$4<(p-b)(p-c)\bullet 12$．（3）

由（3）式可知，$p-c$ 和 $p-b$ 的乘积只能取 5 至 12 中的整数，若 $(p-c)(p-b)=5$，

则 $(p-c,\ p-b)=(1,\ 5)$，代入（2）式可得 $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{5(p-a)}=\dfrac{1}{4}$，

解得 $p-a=24$．

故 $p=(p-a)+(p-b)+(p-c)=24+5+1=30$，

$30-a=24$，$30-b=5$，$30-c=1$，$30-b=5$，$30-c=1$，

$\therefore a=6$，$b=25$，$c=29$．

类似地，若 $(p-c)(p-b)=6$，7，8，9，10，11，12 时，可得 $(p-c,\ p-b,\ p-a)=(1,$ $6,\ 14)=(2,\ 3,\ 10)=(1,\ 8,\ 9)=(2,\ 4,\ 6)$

由此得到 5 个满足周长和面积值相等的整数边三角形为 $(a,\ b,\ c)=(6,\ 25,\ 29)$，$(7,\ 15,\ 20)$，$(5,\ 12,\ 13)$，$(9,\ 10,\ 17)$，$(6,\ 8,\ 10)$．其面积和为：

$60+42+30+36+24=192$.